УДК 530.12:531.51

ОСОБЫЕ РЕШЕНИЯ УРАВНЕНИЙ ТЯГОТЕНИЯ ДЛЯ ФИЗИЧЕСКОГО ВАКУУМА И ЧИСТОГО ИЗЛУЧЕНИЯ

Путилова А. Е.,
научный руководитель канд. физ.-мат. наук Паклин Н. Н.
Сибирский федеральный университет

Изучаются уравнения Эйнштейна для нестационарного сферически симметричного распределения идеальной жидкости и радиального потока лучистой энергии. В работе используется геометрическая система единиц, то есть гравитационная постоянная Ньютона и скорость света выбраны равными единице ($G_N = c = 1$). Постоянная Эйнштейна $\kappa = 8\pi G_N / c^4$ принимается равной 8π. Результирующий тензор энергии-импульса (ТЭИ) складывается из ТЭИ идеальной жидкости и ТЭИ чистого излучения

$$T_{ik} = (\varepsilon + p) u_i u_k - p g_{ik} + \omega l_i l_k, \tag{1}$$

здесь ε – плотность энергии, p – давление идеальной жидкости, 4-скорость $u_i = dx_i / ds$, ω – плотность энергии чистого излучения, а l_i – светоподобный (волновой) вектор ($l_i l^i = 0$). Давление идеальной жидкости выражается через плотность энергии согласно уравнению состояния физического вакуума

$$p = -\varepsilon . \tag{2}$$

С учётом (2), ТЭИ может быть переписан в виде:

$$T_{ik} = \varepsilon g_{ik} + \omega l_i l_k . \tag{3}$$

Метрическому тензору соответствует квадрат интервала

$$ds^2 = y\, dt^2 + 2z\, dtdr - x^2 \left(d\theta^2 + \sin^2\theta\, d\varphi^2 \right), \tag{4}$$

где функции $(x, z, y) = f(t, r)$. Компоненты волнового вектора с учётом метрики суть

$$l^0 = l_1 = 0, \quad l_0 = zl, \quad l^1 \equiv l , \tag{5}$$

тогда из условия геодезичности для светоподобного вектора вытекает следствие:

$$l^i_{;k} l^k = 0 \quad \Rightarrow \quad l = \alpha(t) / z . \tag{6}$$

Из закона сохранения

$$T^{ik}{}_{;k} = 0 \tag{7}$$

следуют уравнения

$$\varepsilon' = 0 \Rightarrow \varepsilon = \varepsilon(t) \tag{8}$$

и, с учётом условия геодезичности,

$$\omega = \frac{\beta(t)}{x^2} - \frac{\dot{\varepsilon}}{\alpha(t) x^2} \int z x^2 dr . \tag{9}$$

Рассмотрим уравнения тяготения. Компонента $G_{11} = -\kappa T_{11}$ имеет явный вид

$$\frac{2}{xz}\left(z x'' - z' x' \right) = -\frac{\kappa(\varepsilon + p) z^2}{y + 2zv} . \tag{10}$$

С учётом (2) правая сторона (10) должна обратиться в ноль, если только справедливо $y + 2zv \neq 0$. Заметим, что 4-скорость определяется как

$$u^i = \frac{dx^i}{ds} = \delta_0^i \frac{1}{\sqrt{y+2zv}} + \delta_1^i \frac{v}{\sqrt{y+2zv}}, \tag{11}$$

где введена радиальная 3-скорость $v = dr/dt$. Условие $y+2zv=0$ означает $ds=0$, то есть обращение в ноль собственного времени, иначе это условие соответствует горизонту событий. В плоском пространстве-времени $ds=0$ отвечает интервалу, лежащему на световом конусе, то есть движение со скоростью света. В искривлённом пространстве-времени появление горизонта событий зависит от скорости и гравитационного поля в данной точке.

Пусть выполняется (2) и $y+2zv=0$, но так, чтобы оставался конечным предел отношения

$$\lim_{\substack{p\to-\varepsilon \\ ds\to 0}} \frac{\kappa(\varepsilon+p)}{y+2zv} = k. \tag{12}$$

В результате имеем

$$k = \frac{2}{xz^3}\left(z'x' - zx''\right),\ v = -\frac{y}{2z}. \tag{13}$$

Решения уравнений Эйнштейна с учётом (12) и (13) будем называть особыми.
Из уравнений $G_{01} = -\kappa T_{01}$, $G_{22} = -\kappa T_{22}$, $G_{00} = -\kappa T_{00}$ можно выразить ε, ω и получить уравнение для метрических коэффициентов x, y, z:

$$\left(y''z + 2\dot{z}z' - z'y' - 2z\dot{z}'\right)x^2 + 2z\left(z^2 + 2z\dot{x}x' - yx'^2\right) = 0. \tag{14}$$

Это нелинейное уравнение в частных производных. Для замыкания требуется задать два условия.

Первое особое решение. Пусть $y=1,\quad x=r$, тогда

$$\kappa\varepsilon = \frac{z'}{rz^3} + \frac{1}{r^2} - \frac{1}{r^2z^2}, \quad \kappa\omega = \frac{2\dot{z}}{rz^2} + \frac{z'}{2rz^3}, \tag{15}$$

а (14) сводится к

$$\frac{\partial^2 w}{\partial\xi\partial t} = 2\mathrm{sh}(w);\ w = \ln z,\ \xi = \frac{1}{r}. \tag{16}$$

Известны два точных решения для (16):

$$z(r,t) = \pm\left(\mathrm{tg}\left(\frac{2a}{r} - \frac{t}{4a} + 2c\right)\right)^2, \tag{17}$$

$$z(r,t) = \exp\left(\pm 4\,\mathrm{artgh}\left(\exp\left(2\sqrt{2}\left(\frac{a}{r} + \frac{t}{4a} + c\right)\right)\right)\right). \tag{18}$$

Второе особое решение. Пусть $y = b(t),\quad x = a(t)$, тогда

$$\kappa\varepsilon = \frac{1}{a^2(t)}, \quad \kappa\omega = \frac{2}{a(t)}\left(\dot{a}\dot{z} - \ddot{a}\right), \tag{19}$$

а (14) сводится к уравнению Лиувилля

$$\frac{\partial^2 w}{\partial r\partial\tau} = \exp(w),\ w = \ln z,\ a^2(t)\frac{\partial}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial\tau}. \tag{20}$$

Для уравнения (20) известно общее решение

$$z(r,\tau) = \exp(w) = 2\frac{\dot{g}(\tau)f'(r)}{\left(g(\tau) + f(r)\right)^2}. \tag{21}$$

Установлено, что существует область допустимых значений для параметров и переменных, которая обеспечивает приемлемый физический смысл для данного решения.