УДК 519.101

КОМБИНАТОРНЫЕ МЕТОДЫ В ПРОЕКТИВНОЙ ГЕОМЕТРИИ

Анциферова В.К.
Научный руководитель канд. физ.-мат. наук Кравцова О.В.
Саяно-Шушенский филиал Сибирского федерального университета

Проективной плоскостью называется множество объектов двух видов: точки и прямые, с отношением инцидентности между ними, удовлетворяющее условиям:

1) две любые различные точки инцидентны единственной прямой;
2) две любые различные прямые инцидентны единственной точке;
3) существуют четыре различные точки, никакие три из которых не инцидентны одной прямой.

Если хотя бы одна из прямых проективной плоскости инцидентна с конечным числом точек $n+1$, то каждая прямая содержит такое же количество точек, каждая точка лежит на таком же количестве прямых. Такая проективная плоскость называется конечной, число n – ее порядок, плоскость содержит n^2+n+1точку и n^2+n+1 прямую.

Существуют различные комбинаторные и алгебраические методы построения и исследования конечных проективных плоскостей. Целью работы является использование нескольких методов построения проективной плоскости для случая $n=4$ (21 точка и 21 прямая).

Построена матрица инцидентности проективной плоскости порядка 4, с ее использованием введена система координат на проективной плоскости методом Холла. Определены алгебраические операции сложения и умножения на координатизирующем множестве. Показано, что координатизирующее множество проективной плоскости порядка 4 является полем, т.е. такая плоскость – дезаргова. Тем самым доказан изоморфизм всех проективных плоскостей порядка 4.

Проективная плоскость порядка 4 задана также при помощи системы попарно ортогональных латинских квадратов, а также при помощи регулярного множества.

Конечная проективная плоскость порядка n существует тогда и только тогда, когда существует полная система из $\mathrm{n}-1$ взаимно ортогональных латинских квадратов порядка n.

Пусть(x,y) – координаты точки, $[m,k]$ - координаты прямой, где x,y,m,k– элементы двумерного векторного пространства над полем Z_2. Точка (x,y) инцидентна плоскости $[m,k]$ тогда и только тогда, когда выполнено условие $y=x\cdot\theta(m)+k$. Здесь $\theta(m)$– матрица размерности 2×2 с элементами из поля Z_2, причем $\theta(0)=\theta(0,0)$– нулевая матрица. Множество всех матриц $\theta(m)$ является регулярным множеством построенной проективной плоскости. Оно состоит из четырех матриц $\theta(0,0),\theta(0,1),\theta(1,0),\theta(1,1)$ и является полем.

В общем случае задание проективной плоскости при помощи регулярного множества возможно лишь при условии, что в данной плоскости существует трансляционная прямой, обладающая особыми геометрическими свойствами. Такая проективная плоскость называется плоскостью трансляций и может иметь порядок, только равный p^n, где p – простое число. Алгебраические свойства регулярного множества полностью определяют геометрические свойства плоскости трансляций.

Следует отметить, что в случае проективной плоскости большого порядка использованиеперечисленныхметодов построения достаточно трудоемко. Как правило, в таких случаях применяется вычислительная техника.