УДК 511.14

ГРУППЫ ГАЛУА ИЛИ РЕШЕНИЕ ПРОБЛЕМЫ РАЗРЕШИМОСТИ УРАВНЕНИЙ N-ОЙ СТЕПЕНИ В РАДИКАЛАХ

Киселёва Е.Д.
научный руководитель к.ф.-м.н., доцент СФУСтепаненко В. А.
МБОУ СОШ №149

Введение

Все началось с уроков математики: на них мы начали разбирать уравнения 1 и 2 степеней. Это было довольно интересное занятие, и я решила поинтересоваться, а уравнения каких степеней вообще существуют в математике, и будем ли мы их решать. С одной стороны, меня обрадовал ответ “да, существуют”- столько, оказывается, нам предстояло изучить! И тут же меня огорчают – “Решать будем, подбирая уравнения частного вида”. Как же так? А общего? Ведь школьным курсом, оказывается, не все уравнения решать сможем. И, все же, любопытство и заинтересованность взяла надо мной верх. Я начала искать дополнительный материал: книги, сайты в интернете и много другое – но все эти источники были как минимум для студентов. И тут к нам в школу приходит научный руководитель, Виталий Анатольевич, к которому меня и привела учительница, видя мой интерес. Тут же передо мной появляется многочисленный список тем на выбор, и, представьте, как я обрадовалась, увидев раздел “решение уравнений”. Таким образом, я и пришла к началу изучения моей сегодняшней работы – Группы Галуа, или решение уравнений n-ого вида в радикалах.

История алгебраических уравнений, возникшая проблема

Обратимся немного к истории.

Математика – древнейшая наука. Ею занимаются на протяжении многих столетий, начиная с учёных древнего Рима и Греции. Такие великие математики, как Пифагор, Аристотель и многие другие известны каждому ребёнку. Весь опыт этих людей в области науки лежит в фундаменте нашей современной математики. И, всё же, математика развивается. С каждый годом или даже днём она становится всё богаче и сложнее. Не смотря на это, существовали такие проблемы алгебры (около 200 лет назад), которое, начиная с древнего Рима и до 19 века, были открыты, и одна из таких проблем – разрешимость алгебраических уравнений в радикалах.

Уже в древности было ясно, сколь важно научиться их решать, ибо к ним сводятся разнообразные проблемы естествознания, инженерии, физики, да и просто практических вычислений. С линейными и квадратными уравнениями были знакомы уже в Двуречье, за две тысячи лет до н.э. В IX веке н.э. в сочинении Мухаммеда аль-Хорезми "Аль-джебр аль-мукабала" излагаются общие правила решения линейных и квадратных уравнений, которые фактически эквивалентны известным нам формулам в их современной записи. Разумеется, многим математикам приходила мысль найти аналогичные формулы для уравнения общего вида (т.е. степени n). Однако даже для кубического уравнения задача оказалась весьма непростой, и лишь в XVI веке итальянским математикам удалось добиться успеха и построить формулы для уравнений с $n = 3$ и $n = 4$. Затем, вплоть до начала XIX века, математики упорно искали методы разрешения в радикалах уравнений степени выше четвертой, однако на протяжении почти трех столетий проблема не поддавалась их усилиям. Истина открылась лишь тогда, когда этим вопросом занялись два юных гения - француз Эварист Галуа и норвежец Нильс Генрик Абель (1802 - 1829).

Основноесодержаниеработы

I этап: ознакомление с литературой, изучение метода Кардано и элементов теории групп Галуа;

II этап: практическое применение полученных знаний для решения общего уравнения 3-ей степени;

III этап: подведение итогов, обобщение результатов.

Сначала я применяю метод Кардано для решения общего приведённого уравнения 3-ей степени в радикалах. Также ознакомилась с методом Феррари для уравнений 4 степени и узнала, чтодля уравнений порядка выше 4 эти методы не проходят. Ответом на возможность решения в радикалах уравнений произвольной степени является разрешимость группы Галуа данного уравнения. Далее на примере кубического уравнения я исследую вопрос: “Чем может помочь знание группы Галуа для нахождения корней в радикалах?”.
Известно, что группой Галуа общего уравнения 3-ей степени являетсяS_3 – группа подстановок из трёх чисел, состоящая из 6 элементов. Исследовав группу S_3 в трёх ее реализациях, я доказала её разрешимость. Далее нахожу инварианты этой группы и, соответственно, через симметрические функции, вычисляю корни общего приведённого уравнения 3-ей степени. Сравнив полученные формулы для нахождения корней в радикалах по методу Кардано и теории групп, убеждаюсь, что они идентичны. Полученный вывод таков: теория групп Галуа, в отличие от методовКардано и Феррари, применяемых исключительно дляалгебраических уравнений 3-ей и 4-ой степеней, актуальна для нахождения корней в радикалах общего уравнения n-ой степени. В этом её универсальность.

Теория групп Галуа играет огромную роль в современных точных науках: кристаллофизике, квантовой механике, квантовой химии, теории твёрдого тела и в вопросах разрешимости в квадратурах дифференциальных уравнений.

Метод Кардано и Феррари

Процесс нахождение корней в радикалах уравнений 3-ей степеней по методу Кардано и изучение метода Феррари соответственно включен в мою полную работу. Но, т.к. объем данного доклада ограничен, я представлю только результаты моего изучения.

Формулу Кардано:

$$y = \sqrt[3]{-\frac{q}{2} + \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}} + \sqrt[3]{-\frac{q}{2} - \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}}$$

Вернёмся мы к данной формуле лишь в конце, сравнивая полученные результаты.

Группа S_3 и ее реализации

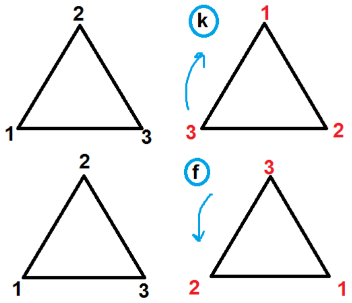
Как построить группу Галуа алгебраического уравнения – сложный вопрос, его ещё предстоит разобрать, что я и буду делать в следующем году. В своей работе далее я буду рассматривать вопрос: как знание группы Галуа помогает решать алгебраическое уравнение, то есть найти его корни.

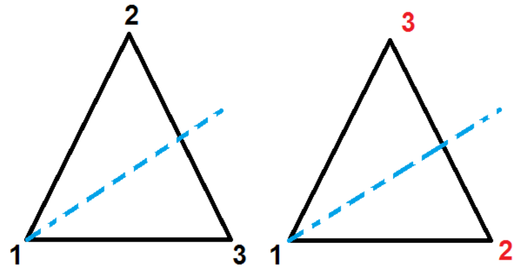
Известно (по Кострикину), что группой Галуа общего кубического уравнения $ax^3 + bx^2 + cx + d = 0$и приведённого кубического уравнения$y^3 + py + q = 0$является группа S_3, состоящая из 6 элементов. Нам для работы потребуется 3 реализации это группы – буквами, подстановками и матрицами.

$$e = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, a = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, b = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{\varepsilon} \\ \varepsilon & 0 \end{pmatrix},$$

$$c = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & \varepsilon \\ \frac{1}{\varepsilon} & 0 \end{pmatrix}, f = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\varepsilon} & 0 \\ 0 & \varepsilon \end{pmatrix}, k = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \varepsilon & 0 \\ 0 & \frac{1}{\varepsilon} \end{pmatrix},$$

где a, b и c – зеркала 2-го порядка (так как являются отражением относительно одной из осей)(рис.2), а f и k – повороты 3-его порядка (на 240° и 120° соответственно)(рис.1).





•	e	a	b	c	k	f
e	e	a	b	c	k	f
a	a	e	k	f	b	c
b	b	f	e	k	c	a
c	c	k	f	e	a	b
k	k	c	a	b	f	e
f	f	b	c	a	e	k

1.Повороты k иf2.Зеркало a3.Таблица Кели

Здесь ε – комплексное число, не равное единице, удовлетворяющее уравнению$\varepsilon^3 = 1$. Применив формулу разности кубов $\varepsilon^3 - 1 = (\varepsilon - 1)(\varepsilon^2 + \varepsilon + 1) = 0$, видим, что ε удовлетворяет и квадратному уравнению $\varepsilon^2 + \varepsilon + 1 = 0$.При этом получается ряд соотношений $\varepsilon^{-1} = \varepsilon^2$, $\varepsilon^4 = \varepsilon$, $\varepsilon^5 = \varepsilon^2$, $\varepsilon^6 = 1$, $\varepsilon^7 = \varepsilon$, … .

Стоит отметить, что каждая из реализаций группы перемножается по-своему. Буквы – по таблице Кели(рис.3), подстановки перемножаются по закону последовательного выполнения двух перестановок,а матрицы – по закону “строка на столбец”. Мы видим, что умножения в каждой реализации группы S_3 соответствует друг другу. Зачем тогда нам нужны три реализации этой группы?

1)Пользуясь таблицей Кели, удобно составлять коммутаторы любых двух элементов $[a,b] = aba^{-1}b^{-1}$, а затем и таблицу коммутаторов (относительно операции коммутирования)(рис.4):

[,]	e	a	b	c	k	f
e	e	e	e	e	e	e
a	e	e	f	k	k	f
b	e	k	e	f	k	f
c	e	f	k	e	k	f
k	e	f	f	f	e	e
f	e	k	k	k	e	e

●	e	k	f
e	e	k	f
k	k	f	e
f	f	e	k

[,]	e	k	f
e	e	e	e
k	e	e	e
f	e	e	e

4.Таблица коммутирования5.Таблица второго коммутирования6.Таблица элемента e

Проверив, что полученные элементы образуют подгруппу S'_3(коммутант) в S_3, строим из них уже вторую таблицу коммутаторов, её элементы образуют подгруппу S''_3 в S'_3 и т.д. То есть, пользуясь таблицей Кели, удобно проверять разрешимость группы, а группа разрешима тогда и только тогда, когда после конечного числа шагов мы получаем единичную подгруппу.

2)Подстановки действуют на многочлены от трёх независимых упорядоченных переменных, соответственно переставляя эти пронумерованные переменные $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix} P(x_1, x_2, x_3) = P(x_1, x_3, x_2)$,$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix} P(x_1, x_2, x_3) = P(x_3, x_1, x_2)$, и т.д.

Подстановками мы будем действовать на резольвенты Лагранжа, проверяя согласованность наших операций.

3)Матрицы действуют на двумерные векторы $\binom{u}{v}$, расположенные в плоскости переменных (u, v), по правилу “строка на столбец”, например: $\begin{pmatrix} 0 & \varepsilon \\ \frac{1}{\varepsilon} & 0 \end{pmatrix}\binom{u}{v} = \begin{pmatrix} \varepsilon v \\ \frac{1}{\varepsilon}u \end{pmatrix}$

Это понадобится для нахождения инвариантов – однородных многочленов первой, второй или третьей степени.

Но, перед тем как приступить к нахождению корней, я убеждаюсь, что группа S_3 разрешима.

Доказательство разрешимости группы S_3

Как уже говорилось, группа разрешима тогда и только тогда, когда после конечного числа шагов мы получаем единичную подгруппу.

Само доказательство началось с таблицы 4(рис.4). И так, данная таблица в заполнении состоит только из e, f и k. Построим повторно таблицу относительно умножения и таблицу относительно коммутирования, но уже используя только 3 элемента. Получим таблицу 5(рис.5) и таблицу 6(рис.6)

Получилась, так сказать, матрешка -второй коммутант находится в первом, а первый, в свою очередь, в главной группе:

(e, a, b, c, k, f) ⊵ (e, k, f)⊵ eили$S_3 \trianglerighteq S'_3 \trianglerighteq S''_3$

Итак, за конечное число шагов(2) получена единичная подгруппа S_3, соответственно, тот факт, что данная группа разрешима, доказан (проверен), а из этого следует, что уравнение уж точно имеет корни в виде радикалов. Теперь можно приступать к нахождению инвариантов.

Нахождений инвариантов

Легко убедиться, что элементы kиапорождают всю группу S_3: всячески перемножая эти элементы, возводя в степени, а затем перемножая уже степени, получим все 6 элементов S_3. Поэтому инварианты будем искать только для аи k.

Опять же, сам процесс изложен в полной работе.

Результат: инвариант 2-го порядка – uv, инвариант 3-его - $u^3 + v^3$

Согласованность действий группы S_3 на резольвентах

Теперь вступают в действие резольвенты Лагранжа: $u=x_1+\varepsilon^2x_2+\varepsilon x_3$, $v=x_1+\varepsilon x_2+\varepsilon^2 x_3$

Это – однородные многочлены первого порядка. Проверив согласованность действия группы S_3 на резольвентах в виде матриц и подстановок(полная работа), мы убеждаемся в том, чтодействие на резольвенты Лагранжа в виде подстановок и в виде матриц согласованы

Тогда я записываю найденные ранее инварианты 2-ого и 3-его порядка через резольвенты и получаю

$$I_1 = uv = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 – (x_1x_2 + x_2x_3 + x_1x_3),$$

$$I_2 = u^3 + v^3 = 2(x_1^3 + x_2^3 + x_3^3) – 3(x_1^2x_2 + x_1^2x_3 + x_1x_2^2 + x_1x_3^2 + x_2^2x_3+ x_2x_3^3) + 12x_1^2 + x_2^2 + x_3^2.$$

Введу в рассмотрение элементарные симметрические функции:

$$s_1 = x_1 + x_2 + x_3,\ s_2 = x_1x_2 + x_2x_3 + x_1x_3, s_3 = x_1x_2x_3$$

так как через них, по теореме Виета, выражаются коэффициенты приведённого кубического уравнения. В частности, для $y^3 + py + q = 0$, где $(x^3 + 0x^2 + px + q = 0)$, соответственно, $s_1 = 0$, $s_2 = p$, $s_3 = -q$.

С другой стороны, инварианты I_1и I_2 так же выражаются через s_1, s_2 , s_3:$I_1= s_1^2 - 3s_2$,$I_2 =2s_1^3 - 9s_1s_2 + 27s_3$.

Используя изначальные значения s_1, s_2 , s_3 для уравнения $y^3 + py + q = 0$, корни которого x_1,x_2,x_3, получаем: $I_1 = -3p$, $I_2 = -27q$.

Из исходного выражения инвариантов $I_1 = uv$ и $I_2 = u^3 + v^3$, вытекает, что $v = \frac{I_1}{u}$, $I_2 = u^3 + \frac{I_1^3}{u^3}$.

Наконец, мы получаем триквадратное (или бикубическое) уравнение для u: $u^6 - I_2u^3 + I_1^3 = 0$

После замены $u^3 = t$ в уравнении, получаем квадратное уравнение $t^2 - I_2t + I_1^3 = 0$.

Спустя несколько шагов (полная работа) получаем: $u=\sqrt[3]{-\frac{27}{2}q+\frac{3}{2}\sqrt{-3D}}$,

$v=\sqrt[3]{-\frac{27}{2}q-\frac{3}{2}\sqrt{-3D}}$, где $D = 4p^3 + 27q^2$ – дискриминант кубического уравнения.

Теперь вместо одного уравнения третьего порядка получаем три уравнения первого порядка – систему линейных уравнений для нахождения корней кубического уравнения:

$$x_1+ \varepsilon^2x_2+ \varepsilon x_3 = u$$
$$x_1+ \varepsilon x_2 + \varepsilon^2x_3 = v$$
$$x_1+x_2+x_3 =0$$

Все, что нам осталось – это решить данную систему. И в итоге, решив систему (полная работа), получаемклассические формулы Кардано!

Результат

После всей моей проделанной работы, несомненно, возникнет вопрос: а зачем разбирать теорию групп Галуа для решения кубического уравнения, если мы можем сделать это, пройдя по более короткому и лёгкому пути в виде метода Кардано? А все дело в том, что, хоть метод Кардано и удобнее, но он, к сожалению, подходит исключительно для уравнений 3-его и 4-ого порядка. Теория групп же применима к уравнению любой степени, что и делает ее универсальной и очень удобной.

Заключение

Подведём итог: для чего нужна теория групп Галуа? Мы с удивлением убедимся, что на практике вопрос о разрешимости конкретных алгебраических уравнений в радикалах не столь уж существенен. Разумеется, существует великое множество экономических, инженерных, физических задач, которые сводятся к решению уравнений высоких степеней, но во всех этих случаях нас, как правило, интересует не возможность построения общей формулы и даже не сама такая формула, а корни. Получение же корней - с некоторой точностью, вполне устраивающей в практических ситуациях - обеспечивается в наши дни стандартным набором средств: компьютером, компьютерной программой и алгоритмом, разработанным в соответствии с одним из методов вычислительной математики. Методов для приближенного решения алгебраических уравнений создано немало; упомяну такие, как обособление корней, графическое решение, метод половинного деления, метод хорд, метод касательных (метод Ньютона), итерационный метод и так далее.

Означает ли появление компьютеров, позволивших быстро производить огромный объем рутинных вычислений, что достижения Галуа в наше время не актуальны? Ни в коем случае! Во-первых, сформулированный им критерий закончил построение одной из частей математической науки, придав ей стройность и необходимую завершенность. Во-вторых, понятия и методы, разработанные им при решении конкретной алгебраической проблемы, оказались более важными, чем само решение и приведенный в предыдущем разделе критерий. Трудно переоценить значение аппарата теории групп для современной математики и физики; основоположником же этой отрасли математической науки стал именно Эварист Галуа. Понятие группы, введенное им, играет огромную роль в современной физике - прежде всего в кристаллофизике, квантовой механике и ее важнейших разделах - квантовой химии и теории твердого тела.

И, конечно, хочется немного рассказать о своих планах. В дальнейшем я хочу научиться строить группу для уравнений самостоятельно, так же буду рассматривать теорию групп на примере 4-ой и 5-степени.

Список используемых источников

1. Н.Г. Чеботарёв Теория Галуа. Главная редакция общетехнической литературы и номография. Москва, 1936;
2. Кострикин А.И. Введение в алгебру – Часть III. Основные структуры алгебры: Учебник для вузов. – М.: Физико-математическая литература, 2000. – 272с.;
3. Инфельд Ф. Эварист Галуа. Избранник богов. – М.: Мол. Гвардия, 1958;
4. Курош А.Г. Лекции по общей алгебре. – М.: Наука, 1975;
5. Постников М.М. Теория Галуа. – М.: Физматгиз, 1963;