УДК 510.64

АЛГОРИТМИЧЕСКИЙ КРИТЕРИЙ ДОПУСТИМОСТИ ПРАВИЛ ВЫВОДА В МОДАЛЬНОЙ ЛОГИКЕ, РАСШИРЯЮЩЕЙ *K*4 ШИРИНЫ НЕ БОЛЕЕ *N*

Мацкевич Т. М.
научный руководитель канд. ф.-м. наук, доцент Кияткин В. Р.
Сибирский федеральный университет

При изучении логических систем кроме постулированных правил вывода применяются допустимые правила, относительно которых логика замкнута.

- Если существует алгоритм, позволяющий по любому предъявленному правилу распознать его допустимость в изучаемой логике, то такая логика называется разрешимой по допустимости.

Настоящий доклад посвящен исследованию вопроса о разрешимости по допустимости расширений системы *K*4 – модальной логики L=K4+($\wedge_{0\leq i\leq n} \Diamond p_i \to \vee_{0\leq i\neq j\leq m} \Diamond(p_i \wedge (p_j \vee \Diamond p_j))$).

Напомним, что правило вывода $\frac{A_1(p_1,\dots,p_n),\dots,A_m(p_1,\dots,p_n)}{B(p_1,\dots,p_n)}$ называется допустимым в логике λ, если для любого набора формул $c_1,\dots,c_n$ из того, что $A_1(c_1,\dots,c_n) \in \lambda,\dots,A_m(c_1,\dots,c_n) \in \lambda$ следует, что $B(c_1,\dots,c_n) \in \lambda$.

- Модель $K_n = (W_n, R_n, V_n)$, где W_n-основное множество, R_n-бинарное отношение, V_n-означивание называется n-характеристической для логики λ, если V_n означивает n различных переменных и для любой формулы α от n переменных имеет место: $\alpha \in \lambda \Leftrightarrow K_n \models \alpha$.
- Означивание S на шкале (W_n, R_n) модели K_n называется формульным, если для любой $\forall p_i \in Dom(S)$ существует формула α_i такая, что $S(p_i) = V_n(\alpha_i)$.

Пусть K_n, $n \in N$ – множество n-характеристических моделей. Правило r вывода $\frac{A_1,\dots,A_m}{B}$ допустимо в логике λ тогда и только тогда, когда для $\forall n \in N$ и каждого формульного означивания S переменных из r имеет место: если $S(A_1) = W_n,\dots,S(A_m) = W_n$, то и $S(B) = W_n$.

Для того, чтобы можно было пользоваться этим критерием в логике L, была сконструирована n-характеристическая модель $\mathfrak{M}_n^\infty$, которая строится индукцией по l, где l-номер слоя.

Теорема 1.

1. Модель $\mathfrak{M}_n^\infty$ является n-характеристической для логики, расширяющей K4 ширины не более n.
2. Каждый элемент модели формульный.

Построенная n-характеристическая модель используется при доказательстве другого критерия – через редуцированную форму правила.

В расширении *K*4 правило $\frac{A_1,\dots,A_m}{B}$ эквивалентно $\frac{A_1\&\dots\&A_m}{B}$, поэтому можно рассматривать только однопосылочные правила вида $\frac{A_1(p_1,\dots,p_n)}{B(p_1,\dots,p_n)}$.

Говорят, что правило r имеет редуцированнную форму, если $\frac{\vee_{j=1}^n \varphi_j}{\neg\Diamond p_0}$, где $\varphi_j := \wedge_{0\leq i\leq m}(p)_i^{k(i,j,1)} \wedge \wedge_{0\leq i\leq m}(\Diamond p)_i^{k(i,j,2)}$, где k(i,j,1), k(i,j,2)∈{0,1} и $(\alpha)^0 = \alpha$ и $(\alpha)^1 = \neg\alpha$ для любой формулы α, p_i – различные переменные и все переменные правила r_f находятся среди этих p_i.

Доказано, что любое правило r может быть приведено к редуцированной форме r_f , и при этом r семантически эквивалентно r_f . Обозначим D $\left(r_f\right)$:= $\{\varphi_{1,\ldots,}\varphi_n\}$ - множество всех дизъюнктов в посылке r_f . Для каждого φ_f зафиксируем обозначения:

$$\Theta_1(\varphi_j) = \{p_i | 0 \le i \le m, k(i,j,1) = 0\},\ \Theta_2(\varphi_j) = \{p_i | 0 \le i \le m, k(i,j,2) = 0\}.$$

Построим некоторую модель $\mathfrak{M}_X = \langle X, R, V\rangle$, где

$$\mathrm{X} : \mathrm{X} \subseteq D(r_f),$$

$$\mathrm{R} : \forall \varphi_j, \varphi_k \in X(\varphi_j R \varphi_k) \Leftrightarrow (\Theta_1(\varphi_k) \cup \Theta_2(\varphi_k)) \subseteq \Theta_2(\varphi_j)),$$

$$\mathrm{V} : \mathrm{V}(p_i) = \{\varphi_j | p_j \in \Theta_1(\varphi_j)\}.$$

Доказаны следующие основные теоремы:

Теорема 2.

Если правило r в редуцированной форме не допустимо в логике, расширяющей К4 ширины не более n, то найдётся подмножество X из $D(r_f)$, такое, что модель $\mathfrak{M}$=$\langle X, R, V\rangle$ удовлетворяет следующим условиям:

1. В $\mathfrak{M}$ имеются рефлексивные и иррефлексивные элементы;
2. В $\mathfrak{M}$ имеется φ_j такое, что $p_0 \in \Theta_2(\varphi_j)$;
3. В $\mathfrak{M}$ имеются элементы φ_s и φ_t такие, что $\Theta_1(\varphi_s) = \Theta_2(\varphi_s)\ и\ \Theta_2(\varphi_t) = \emptyset$;
4. Для любого $\varphi_j \in \mathfrak{M}$ выполняется $\varphi_j \vDash_v \varphi_j$;
5. Для любой антицепи ∇ ширины не более n в модели $\mathfrak{M}$ существуют:
   $\varphi^*_\nabla \in \mathfrak{M}$ такой, что $\Theta_2(\varphi^*_\nabla) = \Theta_1(\varphi^*_\nabla) \cup (\bigcup_{\varphi\in\nabla} \Theta_2(\varphi))$ и
   $\varphi_\nabla \in \mathfrak{M}$ такой, что $\Theta_2(\varphi_\nabla) = \bigcup_{\varphi\in\nabla} (\Theta_1(\varphi) \cup \Theta_2(\varphi))$.

Теорема 3.

Если для правила в редуцированной форме r_f существует подмножество X $\subseteq D(r_f)$ такое, что модель $\mathfrak{M}_X$ удовлетворяет условиям $(1) - (5)$ из теоремы 2, то r_f не допустимо в логике, расширяющей К4 ширины не более n.

Из Теоремы 2 и Теоремы 3 следует основная:

Теорема 4.

Правило в редуцированной форме допустимо в логике, расширяющей К4 ширины не более n, тогда и только тогда, когда для любого подмножество X $\subseteq D(r_f)$ модель $\mathfrak{M}_X$ не удовлетворяет условиям $(1) - (5)$.

Поскольку правила *r* и r_f допустимы или недопустимы одновременно, то доказанная теорема даёт алгоритмический критерий допустимости для любого правила *r* в логике L.