УДК 510.64

АЛГОРИТМИЧЕСКИЙ КРИТЕРИЙ ДОПУСТИМОСТИ ПРАВИЛ ВЫВОДА В МОДАЛЬНОЙ ЛОГИКЕ GL

Рубанова А.В
научный руководитель канд. ф.-м. наук, доцент Кияткин В. Р.
Сибирский Федеральный университет

При изучении логических систем кроме постулированных правил вывода применяются допустимые правила, относительно которых логика замкнута.

Если существует алгоритм, позволяющий по любому предъявленному правилу распознать его допустимость в изучаемой логике, то такая логика называется разрешимой по допустимости.

Настоящий доклад посвящен исследованию вопроса о разрешимости по допустимости расширений системы $K4$ – модальной логики GL (логика доказуемости) GL=K4+$(\Box(\Box p \to p) \to \Box p)$.

Напомним, что правило вывода $\frac{A_1(p_1,\dots,p_n),\dots,A_m(p_1,\dots,p_n)}{B(p_1,\dots,p_n)}$ называется допустимы в логике λ, если для любого набора формул $c_1,\dots,c_n$ из того, что $A_1(c_1,\dots,c_n) \in \lambda,\dots,A_m(c_1,\dots,c_n) \in \lambda$ следует, что $B(c_1,\dots,c_n) \in \lambda$.

- Модель $K_n = (W_n, R_n, V_n)$, где W_n-основное множество, R_n-бинарное отношение, V_n-означивание называется n-характеристической для логики λ, если V_n означивает n различных переменных и для любой формулы α от n переменных имеет место: $\alpha \in \lambda \Leftrightarrow K_n \models \alpha$.

- Означивание S на шкале (W_n, R_n) модели K_n называется формульным, если для любой $\forall p_i \in Dom(S)$ существует формула α_i такая, что $S(p_i) = V_n(\alpha_i)$.

Пусть $K_n, n \in N$ – множество n-характеристических моделей. Правило r вывода $\frac{A_1,\dots,A_m}{B}$ допустимо в логике λ тогда и только тогда, когда для $\forall n \in N$ и каждого формульного означивания S переменных из r имеет место: если $S(A_1) = W_n,\dots,S(A_m) = W_n$, то и $S(B) = W_n$.

Для того, чтобы можно было пользоваться этим критерием в логике GL, была сконструирована n-характеристическая модель $\mathfrak{M}_n^{\infty}$, которая строится индукцией по l, где l-номер слоя.

Теорема 1.

1. *Модель $\mathfrak{M}_n^{\infty}$ является n-характеристической для логики GL.*
2. *Каждый элемент этой модели формульный.*

Построенная n-характеристическая модель используется при доказательстве другого критерия – через редуцированную форму правила.

В расширении $K4$ правило $\frac{A_1,\dots,A_m}{B}$ эквивалентно $\frac{A_1\&\dots\&A_m}{B}$, поэтому можно рассматривать только однопосылочные правила вида $\frac{A_1(p_1,\dots,p_n)}{B(p_1,\dots,p_n)}$.

Говорят, что правило r имеет редуцированнную форму, если $\frac{\bigvee_{j=1}^{n}\varphi_j}{\neg\Diamond p_0}$, где $\varphi_j := \bigwedge_{0\le i\le m}(\Diamond p)_i^{k(i,j,1)}\ \bigwedge_{0\le i\le m}(\Diamond p)_i^{k(i,j,2)}$, где k(i,j,1), k(i,j,2)$\in\{0,1\}$ и $(\alpha)^0 = \alpha$ и $(\alpha)^1 = \neg\alpha$ для любой формулы α, p_i – различные переменные и все переменные правила r_f находятся среди этих p_i.

Доказано, что любое правило r может быть приведено к редуцированной форме

r_f, и при этом r семантически эквивалентно r_f. Обозначим D (r_f) := $\{\varphi_{1,\dots,}\varphi_n\}$ - множество всех дизъюнктов в посылке r_f. Для каждого φ_f зафиксируем обозначения:

$$\Theta_1(\varphi_j) = \{p_i | 0 \le i \le m, k(i,j,1) = 0\},\ \Theta_2(\varphi_j) = \{p_i | 0 \le i \le m, k(i,j,2) = 0\}.$$

Построим некоторую модель $\mathfrak{M}_X = \langle X, R, V \rangle$, где

$$X : X \subseteq D(r_f),$$

$$R : \forall \varphi_j, \varphi_k \in X\left(\varphi_j R \varphi_k\right) \Leftrightarrow \Theta_2(\varphi_k) \subset \Theta_2(\varphi_j) \text{ и } \Theta_1(\varphi_k) \subset \Theta_2(\varphi_j),$$

$$V : V(pi) = \left\{\varphi_j \middle| p_j \in \Theta_1\left(\varphi_j\right)\right\}.$$

Доказаны следующие основные теоремы:

Теорема 2.

Если правило r в редуцированной форме не допустимо в логик GL, то найдётся подмножество X из $D(r_f)$, такое, что модель $\mathfrak{M}$=$\langle X, R, V \rangle$ удовлетворяет следующим условиям:

1. В $\mathfrak{M}$ все сгустки – одноэлементны и редуцированы;
2. В $\mathfrak{M}$ имеется φ_j такое, что p_0 не принадлежит $\Theta_1(\varphi_j)$;
3. Для любого $\varphi_j \in \mathfrak{M}$ выполняется $\varphi_j \vDash_v \varphi_j$;
4. Для любого подмножества ∇ в модели $\mathfrak{M}$ существует элемент φ_∇ такой, что $\Theta_2(\varphi_\nabla) = \bigcup(\Theta_2(\varphi_j) | \varphi_j \in \nabla) \cup \bigcup(\Theta_1(\varphi_j) | \varphi_j \in \nabla)$.

Теорема 3.

Если для правила в редуцированной форме r_f существует подмножество X $\subseteq$ $D(r_f)$ такое, что модель $\mathfrak{M}_X$ удовлетворяет условиям $(1) - (4)$ из теоремы 2, то r_f не допустимо в логике GL.

Из Теоремы 2 и Теоремы 3 следует основная:

Теорема 4.

Правило в редуцированной форме допустимо в логике GL тогда и только тогда, когда для любого подмножество X $\subseteq$ $D(r_f)$ модель $\mathfrak{M}_X$ не удовлетворяет условиям $(1) - (4)$.

Поскольку правила *r* и r_f допустимы или недопустимы одновременно, то доказанная теорема даёт алгоритмический критерий допустимости для любого правила *r* в логике GL.