УДК 517.518.85.

ПОГРЕШНОСТЬ ПОЛИНОМИНАЛЬНОЙ ИНТЕРПОЛЯЦИИ ФУНКЦИИ

Сватко И.А.,
научный руководитель канд. физ.-мат. наук, доц. Киреев И. В.
Институт математики и фундаментальной информатики СФУ

Вычислительные алгоритмы на базе метода конечных элементов (МКЭ) на сегодняшний день несомненно являются доминирующими среди численных методов решения задач механики сплошных сред. Поэтому повышение эффективности МКЭ и его адаптация к современным многопроцессорным вычислительным системам являются одними из самых насущных задач вычислительной математики и механики. Одно из возможных направлений модернизации МКЭ связано с повышением точности полиномиальной аппроксимации искомых функций. Но прямое повышение степени интерполяционного полинома на конечном элементе с неизбежностью приводит к плохой обусловленности систем уравнений, которые необходимо решать при практической реализации метода. Поэтому, в первую очередь для исходной дифференциальной краевой задачи необходим детальный анализ локальной погрешности конечно-элементной аппроксимации, в основе которой лежит интерполирование искомой функции полиномами наименьшей степени.

Данная работа отражает современное состояние одномерной проблемы полиномиальной интерполяции и посвящена методам построения лагранжевой аппроксимации функций одной переменной с явной оценкой погрешности, выраженной в виде интегро-дифференциального оператора от приближаемой функции. Для краткости изложения через $C^m_{[-1,1]}$ будем обозначать линейное пространство функций, определённых на отрезке $[-1,1]$ и имеющих на нём непрерывную производную порядка m. Мы ограничимся рассмотрением лишь таких классов функций, несмотря на то, что некоторые из приведённых ниже результатов справедливы и при более слабых ограничениях.

Пусть функция $u(t)$ определена на отрезке $[-1,1]$, на котором задано разбиение $t_0, t_1, \ldots t_{n-1}, t_n$; будем считать, что $-1 \le t_0 < t_1 < \ldots < t_{n-1} < t_n \le 1$. Обозначим через u_k значение $u(t)$ в точке t_k: $u_k = u(t_k), k = 0,1,\ldots,n.$ По этим узловым значениям можно построить для функции $u(t)$ интерполяционный многочлен Лагранжа $L^n_u(t)$ степени n $L^n_u(t) = \sum_{k=0}^{n} u_k l^n_k(t)$ такой, что

$$L^n_u(t_k) = u_k, \quad k = 0,1,\ldots,n.$$

Для этого достаточно положить

$$l^n_k(t) = \prod_{0 \le i \ne k}^{n} \frac{(t - t_i)}{(t_k - t_i)}, \; k = 0,1,\ldots,n\,.$$

Тогда $l_k^n(t_i)=\delta_{ki}=\begin{cases}1, i=k\\ 0, i\neq k\end{cases}$. Многочлены $l_k^n(t)$ называют лагранжевыми коэффициентами или многочленами влияния узлов t_k. Если воспользоваться многочленом $l^n(t)=(t-t_0)(t-t_1)\dots(t-t_{n-1})(t-t_n)$, то лагранжевы коэффициенты можно представить в виде $l_k^n(t)=\dfrac{l^n(t)}{(t-t_k)\dot{l}^n(t_k)}$; здесь $\dot{l}^n(t_k)$ – производная полинома $l^n(t)$ по аргументу t в точке t_k.

Теорема 1. [*Теорема единственности для* L_u^n] Многочлен $L_u^n(t)$, определённый выше, является единственным многочленом степени n, принимающим значения u_k в точке t_k, $k=0,1,\dots,n$.

Теорема 2. Полиномиальные коэффициенты Лагранжа удовлетворяют соотношениям Коши

$$\sum_{k=0}^{n} l_k^n(t)\equiv 1;\ \sum_{k=0}^{n}(t_k-t)^j l_k^n(t)\equiv 0,\ j=1,2,\dots,n,;\ \sum_{k=0}^{n}(t_k-t)^{n+1} l_k^n(t)\equiv -l^n(t);$$

на всей числовой прямой.

При аппроксимации функции $u(t)$ интерполяционным многочленом $L_u^n(t)$ для погрешности $R_{L_u}^n(t)$, определяемой равенством $u(t)=L_u^n(t)+R_{L_u}^n(t)$, справедливы следующие утверждения.

Теорема 3.[*Лагранжева форма остаточного члена*] Пусть $u(t)\in C_{[-1,1]}^{n+1}$. Тогда существует такая точка $t_*\in(-1,1)$, что имеет место равенство

$$R_{L_u}^n(t)=\frac{l^n(t)}{(n+1)!}u^{(n+1)}(t_*).$$

Теорема 4. [*Интегральная форма остаточного члена*] Пусть $u(t)\in C_{[-1,1]}^{n+1}$. Тогда погрешность интерполяционной формулы Лагранжа можно представить в виде

$$R_{L_u}^n(t)=\sum_{k=0}^{n} l_k^n(t)\int_{t_k}^{t}\frac{(t_k-x)^j}{j!}u^{(j+1)}(x)\,dx,$$

где j – любое из чисел $0,1,2,\dots,n$.

Теорема 5. [*Разделённо-разностная форма остаточного члена*] Пусть $u(t)\in C_{[-1,1]}^{n+1}$. Тогда имеет место равенство

$$R_{L_u}^n(t)=l^n(t)u\left(t_0,t_1,\dots,t_n,\mathrm{t}\right).$$

Теорема 6. [*Эрмитова форма остаточного члена*] Пусть $u(t)\in C_{[-1,1]}^{n+1}$. Тогда имеет место равенство

$$R_{L_u}^n(t)=\frac{l^n(t)}{(n+1)!}\int_0^1 dx_1\int_0^{x_1}dx_2\dots\int_0^{x_n}dt_n u^{(n+1)}\left(t_0+\sum_{k=1}^{n+1}x_k(\mathrm{t}_k-\mathrm{t}_{k-1})\right),$$

где $\mathrm{t}_{n+1}=t$.