УДК 517.9

ЗАДАЧА ИДЕНТИФИКАЦИИ ДВУХ НЕИЗВЕСТНЫХ КОЭФФИЦИЕНТОВ В ОДНОМ ПАРАБОЛИЧЕСКОМ УРАВНЕНИИ

Девальд А.В.
научный руководитель канд. физ.-мат. наук Полынцева С.В.
Сибирский федеральный университет

В работе рассматривается задача идентификации двух неизвестных коэффициентов параболического уравнения с условиями переопределения, заданными на двух различных гиперповерхностях. С помощью условий переопределения, поставленная обратная задача приводится к прямой задаче для нагруженного уравнения. На основании достаточно гладких входных данных, методом слабой аппроксимации доказана разрешимость прямой задачи.

Решение обратной задачи выписано в явном виде через решение прямой задачи. Доказана теорема существования и единственности классического решения обратной задачи в классе гладких ограниченных функций.

Задачи идентификации коэффициентов для различных уравнений и систем уравнений в частных производных исследовались Ю.Е. Аниконовым, Ю.Я. Беловым, Н.И. Иванчовым, В.М. Исаковым, А.И. Кожановым, А.В. Костиным, М.М. Лаврентьевым, А.И. Прилепко и другими.

В полосе $G_{[0,T]} = \{(t,x,z) | 0 \le t \le T, x \in E_1, z \in E_1\}$ рассматривается задача Коши

$$a(t,x)(u_t - q_1(t,x)u_{xx}) = q_2(t,x)u_x + q_3(t,x)u_{zz} + q_4(t,x)u_z + \\ + q_5(t,x)u + b(t,x)f(t,x,z), \qquad (1)$$

$$u(0,x,z) = u_0(x,z),\ (x,z) \in E_2. \qquad (2)$$

Здесь функции $f(t,x,z)$, $u_0(x,z)$ заданы в $G_{[0,T]}$ и E_2 соответственно, коэффициенты $q_i(t,x)$, $i = \overline{1,5}$, непрерывные действительнозначные функции переменных t, x, причем $q_1(t,x) > 0, q_3(t,x) > 0$, $0 \le t \le T$, $T > 0$, $T = const$, $x \in E_1$. $E_n - n -$ мерное евклидово пространство, $n > 1, n \in Z$.

Неизвестными в задаче являются коэффициенты $a(t,x), b(t,x)$ и решение $u(t,x,z)$ задачи (1), (2).

Предположим, что выполняются условия переопределения на двух различных гиперповерхностях

$$u\big(t,x,a_1(t)\big) = \varphi_1(t,x),\ (t,x) \in \Pi_{[0,T]}, \qquad (3)$$

$$u\big(t,x,b_1(t)\big) = \varphi_2(t,x),\ (t,x) \in \Pi_{[0,T]}, \qquad (4)$$

где $\Pi_{[0,T]} = \{(t,x) | 0 \le t \le T, x \in E_1\}$, $a_1(t), b_1(t) \in C^1[0,T]$, $a_1(t) \ne b_1(t)$ и $\varphi_1(t,x)$, $\varphi_2(t,x)$ − заданные функции, удовлетворяющие условиям согласования:

$$\varphi_1(0,x) = u_0\big(x,a_1(0)\big),\ \varphi_2(0,x) = u_0\big(x,b_1(0)\big),\ x \in E_1,\ a_1(0) \ne b_1(0). \qquad (5)$$

Ниже мы рассматриваем классические (достаточно гладкие) решения.

Под решением обратной задачи (1)-(4) в полосе $G_{[0,t_*]}$ $0 \le t_* \le T$, понимается тройка функций $u(t,x,z), a(t,x), b(t,x)$, которые удовлетворяют соотношениям (1) – (4).

Приведем задачу (1) – (4) к некоторой вспомогательной прямой задаче. Положим $z = a_1(t)$, $z = b_1(t)$ в (1) получим систему алгебраических уравнений, из которой определяются неизвестные коэффициенты $a(t,x), b(t,x)$. Они имеют вид

$$a(t,x) = \frac{P_2 f(t,x,a_1(t)) - P_1 f(t,x,b_1(t))}{A}, \quad b(t,x) = \frac{B}{A}, \tag{6}$$

где

$$\psi_1(t,x) = q_2(t,x)\varphi_{1x}(t,x) + q_5(t,x)\varphi_1(t,x),$$

$$\psi_2(t,x) = q_2(t,x)\varphi_{2x}(t,x) + q_5(t,x)\varphi_2(t,x),$$

$$P_1(t,x) = \psi_1(t,x) + q_3(t,x)u_{zz}|_{z=a_1(t)} + q_4(t,x)u_z|_{z=a_1(t)},$$

$$P_2(t,x) = \psi_2(t,x) + q_3(t,x)u_{zz}|_{z=b_1(t)} + q_4(t,x)u_z|_{z=b_1(t)},$$

$$A = -f(t,x,b_1(t))\left[\varphi_{1t} - a_1'(t)u_z|_{z=a_1(t)} - q_1(t,x)\varphi_{1xx}\right] +$$

$$+f(t,x,a_1(t))\left[\varphi_{2t} - b_1'(t)u_z|_{z=b_1(t)} - q_1(t,x)\varphi_{2xx}\right],$$

$$B = -P_1\left[\varphi_{2t} - b_1'(t)u_z|_{z=b_1(t)} - q_1(t,x)\varphi_{2xx}\right] +$$

$$+P_2\left[\varphi_{1t} - a_1'(t)u_z|_{z=a_1(t)} - q_1(t,x)\varphi_{1xx}\right],$$

$$R = P_2 f(t,x,a_1(t)) - P_1 f(t,x,b_1(t)).$$

Подставив найденные коэффициенты *a(t,x)*, *b(t,x)* в уравнение (1), получим прямую задачу

$$\frac{R}{A}u_t = \frac{R}{A}q_1(t,x)u_{xx} + q_2(t,x)u_x + q_3(t,x)u_{zz} + q_4(t,x)u_z +$$

$$+q_5(t,x)u + \frac{B}{A}f(t,x,z), \tag{7}$$

$$u(0,x,z) = u_0(x,z), \ (x,z) \in E_2. \tag{8}$$

Предполагаем, что входные данные достаточно гладкие, имеют все непрерывные производные, входящие в следующее соотношение и удовлетворяют ему

$$\left|a_1'(t)\right| + \left|b_1'(t)\right| + \left|\frac{\partial^{l+s}}{\partial x^l \partial t^s}\varphi_j(t,x)\right| + |q_i(t,x)| +$$

$$+\left|\frac{\partial^{k+r}}{\partial z^k \partial x^r}u_0(x,z)\right| + \left|\frac{\partial^{k+r}}{\partial z^k \partial x^r}f(t,x,z)\right| \le C, \tag{9}$$

Здесь $l = \overline{0,6}$; $s = 0,1$; $j = 1,2$; $i = \overline{1,5}$; $r = \overline{0,4}$; $k = \overline{0,10-2r}$, $C -$ постоянная, $C > 1$. В $\Pi_{[0,T]}$ предполагаем, что

$$|q_{it}(t,x)| + \left|\frac{\partial^2}{\partial t^2}\varphi_j(t,x)\right| + |a_1''(t)| + |b_1''(t)| \le C,$$

$$A(0,x) = -f\big(0,x,b_1(0)\big)\left[\varphi_{1t}(0,x) - a_1'(0)u_{0z}|_{z=a_1(0)} - q_1(0,x)\varphi_{1xx}\right] +$$

$$+f\big(0,x,a_1(0)\big)\left[\varphi_{2t}(0,x) - b_1'(0)u_{0z}|_{z=b_1(0)} - q_1(0,x)\varphi_{2xx}\right] \ge \delta_1 > 0, \tag{10}$$

$$\frac{R(0,x)}{A(0,x)} = \frac{P_2(0,x)f\big(0,x,a_1(0)\big) - P_1(0,x)f\big(0,x,b_1(0)\big)}{A(0,x)} \ge \delta_2 > 0,$$

где

$$\psi_1(0,x) = q_2(0,x)\varphi_{1x}(0,x) + q_5(0,x)\varphi_1(0,x),$$

$$\psi_2(0,x) = q_2(0,x)\varphi_{2x}(0,x) + q_5(0,x)\varphi_2(0,x),$$

$$P_1(0,x) = \psi_1(0,x) + q_3(0,x)u_{0zz}|_{z=a_1(0)} + q_4(0,x)u_{0z}|_{z=a_1(0)},$$

$$P_2(0,x) = \psi_2(0,x) + q_3(0,x)u_{0zz}|_{z=b_1(0)} + q_4(0,x)u_{0z}|_{z=b_1(0)},$$

$\delta_1, \delta_2 - const; i = \overline{1,5}; j = 1,2.$

Методом слабой аппроксимации, в силу (9), (10), доказано существование решения $u(t,x,z)$ прямой задачи (7), (8) в классе $C^{1,2,2}_{t,x,z}(G_{[0,t_*]}) \cap C^{0,0,4}_{t,x,z}(G_{[0,t_*]})$, где

$$C^{1,2,2}_{t,x,z}(G_{[0,t_*]}) = \{f(t,x,z)|\ f_t \in C(G_{[0,t_*]}), \frac{\partial^{k+m}}{\partial z^k \partial x^m} f \in C(G_{[0,t_*]}), k = \overline{0,2}, m = \overline{0,2}\},$$

$$C^{0,0,4}_{t,x,z}(G_{[0,t_*]}) = \{f(t,x,z)|\ \frac{\partial^r}{\partial z^r} f \in C(G_{[0,t_*]}),\ r = \overline{0,4}\}.$$

При этом, при $(t,x,z) \in G_{[0,t_*]}$ справедливы оценки

$$\left|\frac{\partial^{k+m}}{\partial z^k \partial x^m} u(t,x,z)\right| \le C, \qquad \left|\frac{\partial^r}{\partial z^r} u(t,x,z)\right| \le C, \qquad k,m = \overline{0,2}, \qquad r = \overline{0,4}. \tag{11}$$

В силу (9), (11) из (6), (7) получим, что тройка функций $a(t,x), b(t,x), u(t,x,z)$, где *a(t,x)* и *b(t,x)* имеют вид (6), принадлежит классу

$$Z(t^*) = \{a(t,x), b(t,x), u(t,x,z) \mid u \in C^{1,2,2}_{t,x,z}(G_{[0,t_*]}) \cap C^{0,0,4}_{t,x,z}(G_{[0,t_*]});$$
$$a(t,x), b(t,x) \in C^{0,2}_{t,x}(\Pi_{[0,t_*]})\}$$

и удовлетворяет неравенствам

$$\sum_{r=0}^{4}\left|\frac{\partial^r}{\partial z^r} u(t,x,z)\right| \le C; \ \sum_{k=0}^{2}\sum_{m=0}^{2}\left|\frac{\partial^{k+m}}{\partial z^k \partial x^m} u(t,x,z)\right| \le C, (t,x,z) \in G_{[0,t_*]}, \tag{12}$$

$$\sum_{m=0}^{2}\left|\frac{\partial^m}{\partial x^m} a(t,x)\right| + \sum_{m=0}^{2}\left|\frac{\partial^m}{\partial x^m} b(t,x)\right| \le C, (t,x) \in \Pi_{[0,t_*]}. \tag{13}$$

Здесь

$$C^{0,2}_{t,x}(\Pi_{[0,t_*]}) = \left\{\alpha(t,x) \left| \frac{\partial^m}{\partial x^m} \alpha(t,x) \in C\ (\Pi_{[0,t_*]}),\ m = \overline{0,2}\right.\right\}.$$

Имеет место

Теорема. Пусть выполняются условия (5), (9), (10). Тогда существует единственное решение $a(t,x), b(t,x), u(t,x,z)$ задачи (1) – (4) в классе $Z(t_*)$, удовлетворяющее соотношениям (12), (13). Постоянная $t_*, 0 < t_* \le T$, зависит от постоянных C, δ_1, δ_2 из соотношений (9), (10).