УДК 517.9

ОБ ОДНОЙ ЗАДАЧЕ КОШИ ДЛЯ МНОГОМЕРНОГО НАГРУЖЕННОГО ПАРАБОЛИЧЕСКОГО УРАВНЕНИЯ СПЕЦИАЛЬНОГО ВИДА

Кригер Е.Н.,
научные руководители: д-р физ.-мат. наук Белов Ю. Я.,
канд. физ.-мат. наук Фроленков И. В.
Сибирский федеральный университет

В работе рассмотрена задача Коши для многомерного нагруженного (содержащего следы неизвестной функции и ее производных) параболического уравнения специального вида. Такого типа задачи возникают при исследовании обратных задач для многомерных параболических уравнений с данными Коши, когда обратная задача при помощи условий переопределения сводится к прямой для нагруженного уравнения (см. [1], [2]).

Настоящая работа является обобщением работы [3], в которой исследована задача Коши для двумерного нагруженного параболического уравнения специального вида. В работе [4] представлена задача, которая является частным случаем рассмотренной. В ней исследовано уравнение, в котором коэффициенты при производных не зависят от пространственных переменных.

В полосе $G_{[0,T]} = \{(t,x,z) \mid 0 \le t \le T, x = (x_1, x_2, \dots, x_n) \in R^n, z \in R\}$ рассматривается нагруженное параболическое уравнение

$$\begin{aligned} u_t(t,x,z) = {} & \sum_{i=1}^{n} a_i\left(t,x_i,\overline{\omega}_0(t)\right)\cdot u_{x_i x_i}(t,x,z) + a_{n+1}\left(t,z,\overline{\omega}_0(t)\right)\cdot u_{zz}(t,x,z) + \\ & + \sum_{i=1}^{n} b_i\left(t,x,z,\overline{\omega}_0(t)\right)\cdot u_{x_i}(t,x,z) + b_{n+1}\left(t,x,z,\overline{\omega}_0(t)\right)\cdot u_z(t,x,z) + \\ & + f\left(t,x,z,u(t,x,z),\overline{\omega}_0(t),\overline{\omega}_1(t,x)\right), \end{aligned} \tag{1}$$

с начальным условием $u(0,x,z) = u_0(x,z)$. (2)

Здесь

$$\overline{\omega}_0(t) = \left(u\left(t,\alpha^1_{k_1},\dots,\alpha^n_{k_n},\beta_{k_{n+1}}\right), D^s_x u\left(t,\alpha^1_{k_1},\dots,\alpha^n_{k_n},\beta_{k_{n+1}}\right), \frac{\partial^l}{\partial z^l} u\left(t,\alpha^1_{k_1},\dots,\alpha^n_{k_n},\beta_{k_{n+1}}\right) \right),$$

$$\overline{\omega}_1(t,x) = \left(u\left(t,x,\beta_{k_{n+1}}\right), \frac{\partial^l}{\partial z^l} u\left(t,x,\beta_{k_{n+1}}\right) \right),$$

$$s = (s_1,\dots,s_n), s_i = 0,1,\dots,\tilde{p}_i, k_i = 1,\dots,r_i, i = 1,\dots,n, k_{n+1} = 1,\dots,r_{n+1}, l = 0,1,\dots,\tilde{q},$$

$$D^s_x v(x) = D^{(s_1,s_2,\dots,s_n)} v(x) = \frac{\partial^{|s|} v(x_1,x_2,\dots,x_n)}{\partial x_1^{s_1} \partial x_2^{s_2} \dots \partial x_n^{s_n}},$$

где $s = (s_1, s_2, \dots, s_n)$ – мультииндекс, $s_r \ge 0$ – целые, $r = 1,2,\dots,n, |s| = s_1 + \dots + s_n$.

Выберем и зафиксируем целые постоянные p_i и q таким образом, чтобы $p_i \ge \max\{\tilde{p}_i, 2\}, i = \overline{1,n}, \; q \ge \max\{\tilde{q}, 2\}$.

Пусть $0 < t_* \le T$ – некоторая фиксированная постоянная. Через $Z^{p_1,\dots,p_n,q}_{x_1,\dots,x_n,z}([0,t_*])$ обозначим множество функций $u(t,x,z)$, определенных в $G_{[0,t_*]}$, принадлежащих классу

$$C^{1,p_1,\dots,p_n,q}_{t,x_1,\dots,x_n,z}\left(G_{[0,t_*]}\right) = \left\{ u(t,x,z) \mid u_t, \frac{\partial^l}{\partial z^l} D^s_x u \in C\left(G_{[0,t_*]}\right), s = (s_1,\dots,s_n), s_i = \overline{0,p_i}, i = \overline{1,n}, l = \overline{0,q} \right\},$$

ограниченных в $G_{[0,t_*]}$ вместе со всеми производными, входящими в уравнение (1),

$$\sum_{l=0}^{q}\sum_{\substack{s=(s_1,\ldots,s_n),\\ s_i=0,1,\ldots,p_i,\\ i=1,\ldots,n}}\left|\frac{\partial^l}{\partial z^l}D_x^s u(t,x,z)\right|\le C.$$

Под классическим решением задачи (1), (2) в $G_{[0,t_*]}$ будем понимать функцию $u(t,x,z)\in Z^{p_1,\ldots,p_n,q}_{x_1,\ldots,x_n,z}([0,t_*])$, удовлетворяющую в $G_{[0,t_*]}$ уравнению (1) и начальному условию (2).

Полагаем, что выполняются следующие условия на входные данные.

Условие 1. Функции $f,u_0,a_i,b_i,i=1,\ldots,n+1,$ – действительнозначные, определены и непрерывны при любых значениях своих аргументов. Для любого $t_1\in[0,T]$ и любой $u(t,x,z)\in Z^{p_1+2,\ldots,p_n+2,q+2}_{x_1,\ldots,x_n,z}([0,t_1])$ данные функции, как функции переменных $(t,x,z)\in G_{[0,t_*]}$, непрерывны и обладают непрерывными производными, входящими в (3).

Условие 2. Для любого $t_1\in(0,T]$ и любой $u(t,x,z)\in Z^{p_1+2,\ldots p_n+2,q+2}_{x_1,\ldots,x_n,z}([0,t_1])$ функции $a_i,i=1,\ldots,n+1,$ удовлетворяют условию: $a_i\ge a_0>0, i=1,\ldots,n+1.$ Функция $u_0(x,z)$ и ее производные непрерывны и удовлетворяют соотношению

$$\sum_{l=0}^{q+2}\sum_{\substack{s=(s_1,\ldots,s_n),\\ s_i=0,1,\ldots,p_i+2,\\ i=1,\ldots,n}}\left|\frac{\partial^l}{\partial z^l}D_x^s u_0(x,z)\right|\le\tilde{C}.$$

Условие 3. Пусть $\forall t_1\in(0,T]$, $\forall t\in[0,t_1]$, $\forall u(t,x,z)\in Z^{p_1+2,\ldots p_n+2,q+2}_{x_1,\ldots,x_n,z}([0,t_1])$ справедливы следующие оценки

$$\sum_{i=1}^{n+1}\left|a_i\left(t,\overline{\omega}_0(t)\right)\right|+\sum_{i=1}^{n+1}\left|b_i\left(t,\overline{\omega}_0(t)\right)\right|\le P_{\gamma_1}(U(t)),$$

$$\sum_{l=0}^{q+2}\sum_{\substack{s=(s_1,\ldots,s_n),\\ s_i=0,1,\ldots,p_i+2,\\ i=1,\ldots,n}}\left|\frac{\partial^l}{\partial z^l}D_x^s f\left(t,x,z,u(t,x,z),\overline{\omega}_0(t),\overline{\omega}_1(t,x)\right)\right|\le P_{\gamma_2}(U(t)), \tag{3}$$

здесь $\gamma_1,\gamma_2\ge 0$ – некоторые фиксированные целые числа, $P_\varsigma(y)=\tilde{C}\cdot\left(1+y+\ldots+y^\varsigma\right)$ – полином степени ς, где $\varsigma\ge 0$ – целая постоянная, $\tilde{C}>1$ – константа, не зависящая от функции $u(t,x,z)$ и ее производных,

$$U(t)=\sum_{l=0}^{q+2}\sum_{\substack{s=(s_1,\ldots,s_n),\\ s_i=0,1,\ldots,p_i+2,\\ i=1,\ldots,n}}\sup_{0<\xi\le t}\sup_{\substack{x\in R^n,\\ z\in R}}\left|\frac{\partial^l}{\partial z^l}D_x^s u(\xi,x,z)\right|,\ u(t,x,z)\in Z^{p_1+2,\ldots,p_n+2,q+2}_{x_1,\ldots,x_n,z}([0,t_1]).$$

В работе доказано, что при выполнении условий **1 – 3** выполнены следующие утверждения:

а) если условие **3** выполняется при $\gamma_1\ge 0,\gamma_2\in\{0,1\}$, то классическое решение $u(t,x,z)$ задачи (1), (2) существует в классе $Z^{p_1,\ldots,p_n,q}_{x_1,\ldots,x_n,z}([0,T])$;

б) если условие **3** выполняется при $\gamma_1\ge 0,\gamma_2>1$, то существует такая константа t_*, $0<t_*\le T$, зависящая от постоянной $\tilde{C}$, такая, что классическое решение $u(t,x,z)$ задачи (1), (2) существует в классе $Z^{p_1,\ldots,p_n,q}_{x_1,\ldots,x_n,z}([0,t_*])$.

Для доказательства утверждений а) и б) используем метод слабой аппроксимации [5]. Расщепляем уравнение (1) на $n+2$ дробных шага и делаем сдвиг по времени на $\dfrac{\tau}{n+2}$ в следах неизвестной функции и нелинейных членах. Получаем следующую расщепленную задачу.

$$u_t^\tau=(n+2)\cdot a_1\left(t,x_1,\overline{\omega}_0^\tau\left(t-\frac{\tau}{n+2}\right)\right)\cdot u_{x_1x_1}^\tau(t,x,z)+$$

$$+(n+2)\cdot b_1\left(t,x,z,\overline{\omega}_0^\tau\left(t-\frac{\tau}{n+2}\right)\right)\cdot u_{x_1}^\tau(t,x,z),\ m\tau<t\le\left(m+\frac{1}{n+2}\right)\tau;$$

…

$$u_t^\tau=(n+2)\cdot a_n\left(t,x_n,\overline{\omega}_0^\tau\left(t-\frac{\tau}{n+2}\right)\right)\cdot u_{x_nx_n}^\tau(t,x,z)+$$

$$+(n+2)\cdot b_n\left(t,x,z,\overline{\omega}_0^\tau\left(t-\frac{\tau}{n+2}\right)\right)\cdot u_{x_n}^\tau(t,x,z),\ \left(m+\frac{n-1}{n+2}\right)\tau<t\le\left(m+\frac{n}{n+2}\right)\tau;$$

$$u_t^\tau=(n+2)\cdot a_{n+1}\left(t,z,\overline{\omega}_0^\tau\left(t-\frac{\tau}{n+2}\right)\right)\cdot u_{zz}^\tau(t,x,z)+$$

$$+(n+2)\cdot b_{n+1}\left(t,x,z,\overline{\omega}_0^\tau\left(t-\frac{\tau}{n+2}\right)\right)\cdot u_z^\tau(t,x,z),\ \left(m+\frac{n}{n+2}\right)\tau<t\le\left(m+\frac{n+1}{n+2}\right)\tau;$$

$$u_t^\tau=(n+2)\cdot f\left(t-\frac{\tau}{n+2},x,z,u^\tau\left(t-\frac{\tau}{n+2},x,z\right),\overline{\omega}_0^\tau\left(t-\frac{\tau}{n+2}\right),\overline{\omega}_1^\tau\left(t-\frac{\tau}{n+2},x\right)\right),$$

$$\left(m+\frac{n+1}{n+2}\right)\tau<t\le(m+1)\tau;$$

$$u^\tau(t,x,z)\big|_{t\le 0}=u_0(x,z),\ x\in R^n,\ z\in R,$$

$$m=0,1,\ldots,(M-1),\ M\tau=T.$$

Здесь

$$\overline{\omega}_0^\tau\left(t-\frac{\tau}{n+2}\right)=\left(u^\tau\left(t-\frac{\tau}{n+2},\alpha_{k_1}^1,\ldots,\alpha_{k_n}^n,\beta_{k_{n+1}}\right),D_x^s u^\tau\left(t-\frac{\tau}{n+2},\alpha_{k_1}^1,\ldots,\alpha_{k_n}^n,\beta_{k_{n+1}}\right),\right.$$

$$\left.\frac{\partial^l}{\partial z^l}u^\tau\left(t-\frac{\tau}{n+2},\alpha_{k_1}^1,\ldots,\alpha_{k_n}^n,\beta_{k_{n+1}}\right)\right),$$

$$\overline{\omega}_1^\tau\left(t-\frac{\tau}{n+2},x\right)=\left(u^\tau\left(t-\frac{\tau}{n+2},x,\beta_{k_{n+1}}\right),\frac{\partial^l}{\partial z^l}u^\tau\left(t-\frac{\tau}{n+2},x,\beta_{k_{n+1}}\right)\right),$$

$$s=(s_1,\ldots,s_n),\ s_i=0,1,\ldots,p_i,\ k_i=\overline{1,r_i},\ i=\overline{1,n},\ k_{n+1}=\overline{1,r_{n+1}},\ l=0,1,\ldots,q.$$

Для решения расщепленной задачи доказаны равномерные по τ оценки:

$$\left|\frac{\partial^l}{\partial z^l}D_x^s u^\tau(t,x,z)\right|\le C,\ l=0,1,\ldots,q+2,\ s=(s_1,\ldots,s_n),\ s_i=0,1,\ldots,p_i+2,\ i=\overline{1,n},$$

$$\left|\frac{\partial^l}{\partial z^l}D_x^s u_t^\tau(t,x,z)\right|\le C,\ l=0,1,\ldots,q,\ s=(s_1,\ldots,s_n),\ s_i=0,1,\ldots,p_i,\ i=\overline{1,n},$$

в случае а) при $(t,x,z)\in G_{[0,T]}$, в случае б) при $(t,x,z)\in G_{[0,t_*]}$.

Доказанные оценки гарантируют выполнение условий теоремы Арцела о компактности, в силу которой некоторая подпоследовательность $u^{\tau_k}(t,x,z)$ последовательности $u^{\tau}(t,x,z)$ решений расщепленной задачи сходится вместе с соответствующими производными к функции $u(t,x,z)$ из класса $Z^{p_1,\dots,p_n,q}_{x_1,\dots,x_n,z}([0,T])$ в случае а) и из класса $Z^{p_1,\dots,p_n,q}_{x_1,\dots,x_n,z}([0,t_*])$ в случае б), которая в силу теоремы сходимости метода слабой аппроксимации (см. [5]) является решением задачи (1), (2).

Библиографический список

1. *Майнагашева А. С., Фроленков И. В.* Об одной задаче идентификации функции источника многомерного параболического уравнения // VI Всесибирский конгресс женщин-математиков (в день рождения Софьи Васильевны Ковалевской): Материалы Всероссийской конференции, 15 – 17 января 2010 г. – Красноярск: РИЦ СибГТУ, 2010. – С. 268 – 271.

2. *Белов Ю. Я., Фроленков И. В.* Некоторые задачи идентификации коэффициентов полулинейных параболических уравнений // Доклады Академии Наук. – 2005. – Т. 404. – № 5. – С. 583 – 585.

3. *Фроленков И. В., Белов Ю. Я.* О существовании решения для класса нагруженных двумерных параболических уравнений с данными Коши: сб. науч. статей «Неклассические уравнения математической физики», Отв. ред. А.И. Кожанов. – Новосибирск: Изд. Института мат., 2012. – С. 262 – 279.

4. *Кригер Е. Н., Фроленков И. В.* Исследование одного многомерного нагруженного уравнения теплопроводности специального вида в неограниченной области // Молодежь. Техника. Космос: труды VI Общероссийской молодежной науч.-техн. конф./ Балт. гос. техн. ун-т. – СПб.; 2014. – С. 54 – 55.

5. *Belov Yu. Ya.* Inverse Problems for Partial Differential Equations. – Utrecht: VSP, 2002. – 211 p.