УДК 532.5.013.4

ОБ УСТОЙЧИВОСТИ ТЕЧЕНИЯ ЖИДКОСТИ В ВЕРТИКАЛЬНОМ СЛОЕ В МОДЕЛИ МИКРОКОНВЕКЦИИ

Шефер И. А.,
научный руководитель канд. физ.-мат. наук Бекежанова В. Б.
Сибирский федеральный университет

В последние десятилетия, в связи с развитием наукоемких технологий, существенно расширился круг задач, связанных со свободноконвективными течениями. Примерами прикладных научных отраслей, в которых интенсивно развиваются и используются результаты исследований естественной конвекции, являются кристаллофизика и космические технологии. Возросшая сложность математических моделей и экспериментальных установок позволяют ставить и решать новые задачи в этих областях.

В данной работе исследуется стационарное течение вязкой теплопроводной жидкости в вертикальном канале с неподвижными твердыми стенками, на которых задан поток тепла. Изучается линейная устойчивость течения относительно малых возмущений в рамках модели микроконвекции.

1. Постановка задачи

Пусть жидкость заполняет плоский вертикальный канал ширины $2a$. Границы канала – неподвижные твердые стенки. Для описания движения жидкости воспользуемся моделью микроконвекции, предложенной Пухначевым В. В. (см. Пухначёв В.В. *Модель конвективного течения при пониженной гравитации*, Моделирование в механике, 1992, Т. 6):

$$\rho = \rho_0(1+\beta\theta)^{-1},$$
$$\mathrm{div}\boldsymbol{w} = 0,$$
$$\boldsymbol{w}_t + \boldsymbol{w}\cdot\nabla\boldsymbol{w} + \beta\chi(\nabla\theta\cdot\nabla\boldsymbol{w} - \nabla\boldsymbol{w}\cdot\nabla\theta) + \beta^2\chi^2\left(\Delta\theta\nabla\theta - \frac{\nabla|\nabla\theta|^2}{2}\right) \tag{1.1}$$
$$= (1+\beta\theta)(-\Delta q + \nu\Delta\boldsymbol{w}) + \boldsymbol{g},$$
$$\theta_t + w\cdot\nabla\theta + \beta\chi|\nabla\theta|^2 = (1+\beta\theta)\chi\Delta\theta,$$

где ρ – плотность, $q = \rho_0^{-1}(p - \lambda\mathrm{div}\boldsymbol{v}) - \beta(\nu-\chi)\chi\Delta\theta$ – модифицированное давление, $\boldsymbol{w} = \boldsymbol{v} - \beta\chi\nabla\theta$ – модифицированный вектор скорости. Так как в дальнейшем рассматриваются только стационарные течения, то для замыкания уравнений зададим на границах условия для скорости и температуры в следующем виде:

$$\boldsymbol{w} + \beta\chi\nabla\theta = 0, \qquad k\frac{\partial\theta}{\partial\boldsymbol{n}} = d, \tag{1.2}$$

где k – коэффициент температуропроводности, d – заданный поток тепла.

Известно, что плоские течение в вертикальном слое реализуются, если величина теплового потока не зависит от z, а компонента скорости $v_3 = 0$. В монографии [Андреев В.К., Капцов О.В., Пухначёв В.В., Родионов А.А. *Применение теоретико-групповых методов в гидродинамике*, Новосибирск: Наука, 1994] показано, что в этом случае решения системы (1.1) представимы в виде $\boldsymbol{w} = (u_0, v(x), 0)$, $\theta = \theta(x)$, $q = (\varphi - g)y$. В работе [Андреев В.К., Бекежанова В.Б. *Об устойчивости стационарного течения в вертикальном слое в модели микроконвекции*, Изв. РАН, МЖГ. 2004, №2] получен точный вид решений с $u_0 = \beta\chi d/k \equiv const$:

$$v(x) = \frac{1}{\nu}\left[(\varphi - g)\frac{x^2}{2} + c_1x + c_2 + \frac{g\chi^2}{{u_0}^2}\left(1+\beta\bar{\theta} - \frac{u_0x}{\chi}\right)\left(\ln\left(1+\beta\bar{\theta} - \frac{u_0x}{\chi}\right) - 1\right)\right], \tag{1.3}$$

$$c_1 = -\frac{g\chi^2}{2a{u_0}^2}\left(f_1\ln f_1 - f_2\ln f_2 + \frac{2u_0 a}{\chi}\right),$$
$$c_2 = \frac{(g-\varphi)}{2}a^2 - \frac{g\chi^2}{{u_0}^2}\left(f_1\ln f_1 + f_2\ln f_2 - 2(1+\beta\bar{\theta})\right),$$
$$f_1 = 1+\beta\bar{\theta} - \frac{u_0 a}{\chi}, \qquad f_2 = 1+\beta\bar{\theta} + \frac{u_0 a}{\chi},$$
$$\varphi = g\left\{1 - \left[\frac{\chi}{2u_0 a}(\ln f_2 - \ln f_1)\left(f_1\ln f_1 + f_2\ln f_2 + \frac{\chi}{u_0 l}(1+\beta\bar{\theta})(f_1\ln f_1 + f_2\ln f_2)\right)\right.\right.$$
$$\left.\left. + 2\right]\cdot\left[(1+\beta\bar{\theta}) + (\ln f_2 - \ln f_1)\left(\frac{u_0 l}{2\chi} - \frac{\chi}{2u_0 l}(1+\beta\bar{\theta})^2\right)\right]^{-1}\right\}, \tag{1.4}$$
$$\theta(x) = \bar{\theta} - \frac{u_0 x}{\beta\chi} = \bar{\theta} - \theta^* x, \qquad \bar{\theta} - \ const. \tag{1.5}$$

2. Безразмерные параметры. Спектральная задача

Рассмотрим возмущенное решение исходной задачи $\tilde{\boldsymbol{w}} = \boldsymbol{w} + \boldsymbol{W}, \tilde{\theta} = \theta + T, \tilde{q} = q + Q$. Подставив новые искомые функции $\tilde{\boldsymbol{w}}$, $\tilde{\theta}$, $\tilde{q}$ в систему (1.1), (1.2), считая возмущения и их производные малыми, получим линеаризованную задачу:

$$\mathrm{div}\boldsymbol{W} = 0,$$
$$\boldsymbol{W}_t + \boldsymbol{w}\cdot\nabla\boldsymbol{W} + \boldsymbol{W}\cdot\nabla\boldsymbol{w} + \beta\chi(\mathrm{rot}\,\boldsymbol{W}\times\nabla\theta + \mathrm{rot}\boldsymbol{w}\times\nabla T)$$
$$+ \beta^2\chi^2\mathrm{div}(\nabla\theta\otimes\nabla\mathrm{T} + \nabla T\otimes\nabla\theta - 2I\nabla\theta\cdot\nabla T)$$
$$= (1+\beta\theta)(-\Delta Q + \nu\Delta\boldsymbol{W}) + \beta T(-\Delta q + \nu\Delta\boldsymbol{w}),$$
$$T_t + \boldsymbol{w}\cdot\nabla T + \boldsymbol{W}\cdot\nabla\theta + 2\beta\chi\nabla\theta\cdot\nabla\mathrm{T} = (1+\beta\theta)\chi\Delta T + \beta\chi T\Delta\theta, \tag{2.1}$$
$$W + \beta\chi\nabla\mathrm{T} = 0,\ \ T_x = 0, \qquad |x| = a.$$

Введем безразмерные переменные следующим образом:

$$\boldsymbol{x}' = \frac{\boldsymbol{x}}{a}, \qquad \boldsymbol{W}' = \frac{\boldsymbol{W}a}{\chi}, \qquad T' = \frac{T}{\theta^*}, \qquad Q' = \frac{Qa^2}{\nu\chi}.$$

Подставим их в задачу (2.1) и, опустив штрихи, получим:

$$U_t + \mathrm{Pe}U_x + vU_y - \varepsilon v_x T_y + \varepsilon^2\theta_x(T_{xx} + T_{zz}) = (1+\varepsilon\theta)(-Q_x + \nu\Delta U)\mathrm{Pr},$$
$$V_t + \mathrm{Pe}V_x + vV_y + v_x U + \varepsilon\left[\theta_x\left(V_x - U_y\right) + v_x T_x\right] - \varepsilon^2\theta_x T_{xy}$$
$$= (1+\varepsilon\theta)\left(-Q_y + \nu\Delta V\right)\mathrm{Pr} + \frac{\mathrm{Gr}T}{1+\varepsilon\theta}$$
$$W_t + \mathrm{Pe}W_x + vW_y + \varepsilon\theta_x(W_x - U_z) - \varepsilon^2\theta_x T_{xz} = (1+\varepsilon\theta)\left(-Q_y + \nu\Delta W\right)\mathrm{Pr}, \tag{2.2}$$
$$T_t + \mathrm{Pe}T_x + vT_y + \theta_x U + 2\varepsilon\theta_x T_x = (1+\varepsilon\theta)\chi\Delta T,$$
$$U_x + V_y + W_z = 0,$$
$$W + \varepsilon\nabla\mathrm{T} = 0,\ \ T_x = 0, \qquad |x| = 1.$$

При указанном выборе безразмерных переменных задача (2.2) содержит следующие определяющие безразмерные параметры: $Pe = \ u_0 a/\chi,\ \ \varepsilon = \beta\theta^*$, $\mathrm{Pr} = \ \nu/\chi,\ Gr = \beta\theta^* g a^3/\chi^2$.

Представим решение краевой задачи (2.2) в виде нормальных волн

$$(W, Q, T) = \left(W(x), Q(x), T(x)\right)\cdot\exp[i(\alpha_1 y + \alpha_2 z - Ct)], \tag{2.3}$$

где α_1, α_2 – волновые числа вдоль осей y и z соответственно, C – комплексный декремент, определяющий развитие возмущений со временем. Подставляя представление (2.3) в (2.2), получим спектральную задачу:

$$i(\alpha_1 v - C)U + \mathrm{Pe}U' - [i\alpha_1\varepsilon v_x + \varepsilon^2\theta_x(\alpha_1^2 + \alpha_2^2)]T$$
$$= (1+\varepsilon\theta)[-Q' + U'' - (\alpha_1^2 + \alpha_2^2)U]\mathrm{Pr},$$

$$
\begin{aligned}
i(\alpha_1 v - C)V + (\mathrm{Pe} + \varepsilon\theta_x)V' + (v_x - i\alpha_1\varepsilon\theta_x)U - [\varepsilon v_x - i\alpha_1\varepsilon^2\theta_x]T' \\
= (1+\varepsilon\theta)[-i\alpha_1 Q + V'' - (\alpha_1^2 + \alpha_2^2)V]\mathrm{Pr} + \frac{\mathrm{Gr}T}{1+\varepsilon\theta}, \\
i(\alpha_1 v - C)W + (\mathrm{Pe} + \varepsilon\theta_x)W' - i\alpha_2\varepsilon\theta_x U - i\alpha_2\varepsilon^2\theta_x T' \\
= (1+\varepsilon\theta)[-i\alpha_2 Q + W'' - (\alpha_1^2 + \alpha_2^2)W]\mathrm{Pr}, \\
i(\alpha_1 v - C)T + (\mathrm{Pe} + 2\varepsilon\theta_x)T' + \theta_x U = (1+\varepsilon\theta)[T'' - (\alpha_1^2 + \alpha_2^2)T], \\
U' + i\alpha_1 V + i\alpha_2 W = 0, \\
U + \varepsilon\tilde{T}' = 0, \qquad V = W = 0, \qquad T' = 0, \qquad |x| = 1.
\end{aligned}
\tag{2.4}
$$

Показано, что ее можно свести к плоской задаче:

$$
\begin{aligned}
i(\alpha_1 v - C)\tilde{Z} + (\mathrm{Pe} + \varepsilon\theta_x)\tilde{Z}' + \left(v_x - \frac{i\alpha}{\lambda}\varepsilon\theta_x\right)\tilde{U} + \left[\varepsilon v_x - \frac{i\alpha}{\lambda}\varepsilon^2\theta_x\right]\tilde{T}' \\
= (1+\varepsilon\theta)\left[-\frac{i\alpha}{\lambda}Q + \tilde{Z}'' - \alpha^2\tilde{Z}\right]\mathrm{Pr} + \frac{\mathrm{Gr}T}{1+\varepsilon\theta}, \\
i(\alpha_1 v - C)\tilde{U} + \mathrm{Pe}\tilde{U}' - [i\alpha_1\varepsilon v_x + \varepsilon^2\theta_x\alpha^2]\tilde{T} \\
= (1+\varepsilon\theta)\left[-\tilde{Q}' + \tilde{U}'' - \alpha^2\tilde{U}\right]\mathrm{Pr}, \\
i(\alpha_1 v - C)\tilde{T} + (\mathrm{Pe} + 2\varepsilon\theta_x)\tilde{T}' + \theta_x\tilde{U} = (1+\varepsilon\theta)[\tilde{T}'' - \alpha^2\tilde{T}], \\
\tilde{U}' + i\alpha_1\tilde{Z} = 0, \\
\tilde{U} + \varepsilon\tilde{T}' = 0, \qquad \tilde{Z} = 0, \qquad \tilde{T}' = 0, \qquad |x| = 1
\end{aligned}
\tag{2.5}
$$

где $\lambda = \alpha_1/\alpha$, $\alpha = \sqrt{\alpha_1^2 + \alpha_2^2}$.

3. Численное решение

Будем рассматривать плоские возмущения (в задаче (2.5) следует положить $\lambda = 1$, $\alpha = \alpha_1$). Численный анализ устойчивости модельной среды SiO_3 для разных значений теплового потока на границе (5, 10, 100, 200 Вт) проводился с использованием метода ортогонализации (см. Годунов С. К. *О численном решении краевых задач для систем линейных ОДУ*, Успехи мат. Наук, 1961, Т.6, вып. 3) для решения краевой задачи и метода секущих для поиска декрементов. Код реализован в среде MATLAB. Расчеты проводились в диапазоне волновых чисел $0.1 < \alpha_1 \leq 10$. Полученные численные результаты говорят о том, что возмущения являются затухающими. Следовательно течение, которое описывается решением (3) устойчиво.