УДК 517.55

АМЕБЫ КОМПЛЕКСНЫХ КРИВЫХ

Музалевская Е.М.
научный руководитель канд. физ.-мат. наук Знаменская О.В.
Сибирский Федеральный Университет

Введем необходимые определения.

Определение 1.

Амеба

$$Log: \mathbb{T}^n \to \mathbb{R}^n, (z_1, \dots, z_n) \to (\log|z_1|, \dots, \log\ |z_n|)$$

это образ алгебраического множества при логарифмическом отображении.

Определение 2.

Однопараметрическая

$$\vartheta = \{z = b \cdot t^a = (b_1 t^{a_1}, \dots, b_n t^{a_n}), a \in \mathbb{R}^n, b, t \in \mathbb{T}^n\}$$

является асимптотической линией для гиперповерхности V, если при $t \to \infty$ главный член многочлена $f(bt^a)$ обращается в нуль в пределе. Где $f(bt^a)$ - срезка многочлена $f\,(z)$ в точке b в направлении вектора a.

Определение 3.

Срезка $f_a(z)$ многочлена $f(z) = \sum_{\alpha \in A} c_\alpha z^\alpha$ в направлении вектора a определяется как

$f_a(z) = \sum_{\alpha \in \Delta_a} c_\alpha z^\alpha$,

где Δ_a - грань многоугольника Δ в направлении вектора a.

Определение 4.

Многогранником Ньютона полинома f называется множество

$\Delta_f := \{x \in \mathbb{R}^n : x \in Conv(A)\}$,

где $Conv(A)$ - выпуклая оболочка показателей мономов $f(z)$.

Термин *амеба* был предложен Гельфандом, Капрановым и Зелевинским в их монографии "Дискриминанты, результанты и многомерные детерминанты" Со временем обнаружилось, что теория амеб представляет собой эффективный аппарат для изучения распределения нулей полинома Лорана. Одни из первых результатов об амебах были получены в статьях М. Форсберга -М. Пассаре - А. Циха. Теорию амеб можно применить к исследованию асимптотик многомерных разностных уравнений, играющих важную роль в теории обработки цифровых сигналов.

В исследовании амеб, важную роль играет спайн амебы. Спайном амебы является тропическая кривая. Чтобы получить спайн тропический многочлен, определяющий спайн амебы,, согласно Фросбергу, Пассаре, Циху необходимо заменить обычный многочлен тропическим путем замены обычных операций сложения и умножения тропическими следующим образом:

$$x \oplus y = \max\{x, y\}\ , x \odot y = x + y$$

При тропикализации многочлена его коэффициенты при вершинах заменяются логарифмами модулей. Т.о. получаем соответствие:

$$f(z) = \sum_{i,j=1}^{n} a_{i_n j_n} z_1^{i_n j_n} \to \oplus_{i,j=1}^{n} b_{i_n j_n} \odot x_1{}^{i_n}\ x_2^{j_n} = \max\{b_{i_n j_n} + < i, x >\}$$

Тропическая кривая представляет собой граф, состоящий из точек и прямых, для которых максимум достигается хотя бы дважды.

Коэффициенты для внутренних точек и точек, лежащих на сторонах многоугольника Ньютона, но не являющихся вершинами находятся более сложным образом, замена $a_{i_n j_n} \to \ln a_{i_n j_n}$ не к полиному, определяющий спайн.

Был разработан метод вычисления асимптот амебы, на основе вычисления образов асимптотических кривых при логарифмическом отображении.

Этот метод позволяет восстановить поведение амебы на бесконечности, более того для некоторых амеб восстановить весь спайн, т.е. вычислить не только коэффициенты, соответствующие вершинам многоугольника Ньютона, но и оставшиеся коэффициенты, не вычисляя коэффициенты способом Циха, Пассаре

Были вычеслены коэффициенты, определяющие спайн для примеров: $z-b-a(w-w^{-1})=0$ и $1+z+w+\frac{z^2}{6}+\frac{w^2}{6}=0$. Их особенность в том, что многогранники не содержат внутренних точек.

Справедлива гипотеза:

Если многогранник Ньютона полинома Лорана, не содержит внутренних точек, то метод вычисления асимптот амебы позволяет определить коэффициенты полинома, определяющего спайн.

Если многоугольник содержит внутренние точки, как например, $z^2+b_1z+b_2+a\,(w-w^{-1})=0$, то тропикалиизацию этого многочлена можно записать в виде: $\max\{2x\,,\gamma_1+x,\log|a|+y,-\log|a|+y,\gamma_2\}$. Зная уравнения наклонных и горизонтальных асимптот можно установить значение коэффициента γ_2 при точке многоугольника Ньютона (0,0). Было установлено, что при $\gamma_1\leq\frac{1}{2}\gamma_2$ у амебы откроется «дырка». При $\gamma_1>\frac{1}{2}\gamma_2$ ее не будет. Данных для вычисления коэффициента γ_1 устанавливающих связь между исходным полиномом и тропическим недостаточно.