УДК 517.55+517.96

НЕОБХОДИМОЕ И ДОСТАТОЧНОЕ УСЛОВИЕ D-ФИНИТНОСТИ ПРОИЗВОДЯЩИХ ФУНКЦИЙ РЕШЕНИЙ МНОГОМЕРНЫХ РАЗНОСТНЫХ УРАВНЕНИЙ

Некрасова Т. И.

научный руководитель доктор физ.-мат. наук, проф. Лейнартас Е. К.

Сибирский федеральный университет

В данной работе исследуются производящие функции решений разностного уравнения в рациональных конусах целочисленной решетки Z^n (см. [1], [2], [3]). Для функций, которые представляются рядами Лорана с носителями в таких конусах дано определение D-финитности. Приведены необходимое и достаточное условия D-финитности производящейфункции решения.

Рациональным конусом в Z^n будем называть множество K точек, представимых линейной комбинацией s векторов $a^1, \dots, a^s \in Z^n$:

$$K = \{x : x = \lambda_1 a^1 + \dots + \lambda_s a^s, \qquad \lambda_i \in Z_+, i = 1, \dots, s\},$$

где Z_+– целые неотрицательные числа.

Ограничимся случаем симплициальных конусов, то есть таких, в которых каждый элемент выражается через образующие единственным образом. В частности, это означает, что образующие векторы линейно независимы и их число $s \leq n$.

Обозначим$A = \{\alpha\}$–некоторое фиксированное конечное множествоточек n-мерной целочисленной решетки, $A \subset K$ и рассмотрим однородное разностное уравнение вида

$$\sum_{\alpha \in A} c_\alpha f(x + \alpha) = 0, \ x \in K, \qquad (1)$$

где c_α – коэффициенты (постоянные) уравнения.

Характеристическим многочленом уравнения (1) называется многочлен Лорана$P(z) = \sum_{\alpha \in A} c_\alpha z^\alpha$.

Многогранником Ньютона N_P многочлена P называется выпуклая оболочка вR^nэлементов множества A.

Определим отношение частичного порядка $\geq_K$ между любыми двумя точками $m, \alpha \in Z^n$. А именно, будем писать$m \geq_K \alpha$, если $m + K \subset \alpha + K$.

Кроме того, будем писать$m \ngeq_K \alpha$, если$m \in K \setminus \{K + \alpha\}$.

Далее рассматриваются уравнения вида (1), многогранник Ньютона N_P характеристического многочленакоторого удовлетворяет условию

$$\exists\, m \in A: m \geq_K \alpha, \forall \alpha \in N_P \cap K. \qquad (*)$$

Отметим, что если такая точка существует, то она единственная.Зафиксируем такое$m \in N_P \cap K$ и обозначим$K_m = \{x \in K : x \ngeq_K m\}$.

Задача:

Найти решение f(x) уравнения (1), которое на множестве K_m совпадает с заданной функцией$\varphi(x)$:

$$f(x) = \varphi(x), x \in K_m. \qquad (2)$$

Задачу(1), (2)назовемзадачейКошидляразностногоуравнения(1).

Производящейфункцией (производящимрядом) n-мернойпоследовательности$f(x): K \to C$назовемрядЛоранавида$F(z) = \sum_{x \in K} \frac{f(x)}{z^x}$.

Еслиобозначить $K_\alpha = \{ x \in K : x \ngeq_K \alpha \}$, тоочевидно, чтодлявсех $\alpha \in N_P \cap K$справедливовложение$K_\alpha \subset K_m$.

Рассмотримрядывида $\Phi_\alpha(z) = \sum_{x\in K_\alpha} \frac{\varphi(x)}{z^x}$, построенныепоначальнымданным$\varphi(x)$задачиКоши.

Носители этих рядов K_α принадлежат множеству K_m , на котором заданы начальные данные $\varphi(x)$, поэтому будем называть ряды $\Phi_\alpha(z)$ производящими функциями начальных данных.

Перенесем понятие D-финитности со степенных рядов на ряды Лорана с носителями в рациональных конусах.

Сначала напомним определение D-финитного ряда для одномерного случая [4].

Если ряд $u \in C\,[[z]]$ удовлетворяет приведенному ниже условию (**),то будем говорить, что u есть D-финитный степенной ряд.

(**) Существуют многочлены $p_0(z), \ldots, p_d(z) \in C[z]$, причем$p_d(z) \neq 0$,$ такие, что

$$p_d(z)u^{(d)} + p_{d-1}(z)u^{(d-1)} + \ldots + p_1(z)u' + p_0(z)u = 0,$$

где $u^{(j)} = \frac{\partial^j u}{\partial z^j}$.

Для многомерного случая определение выглядит следующим образом (см., например, [1]).

Пусть $F(\xi) = \sum_{\lambda\geq 0} a\xi^\lambda$формальный степенной ряд переменных $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_s$.

F называется D-финитным,если он удовлетворяет системе дифференциальных уравнений вида

$$P_k^i(\xi)\frac{\partial^k F}{\partial \xi_i^k} + \ldots + P_1^i(\xi)\frac{\partial F}{\partial \xi_i} + P_0^i(\xi)F = 0, i = 1, \ldots, s,$$

где $P_j^i(\xi)$ – многочлены.

Любой элемент из рационального конуса K можно представить в виде линейной комбинации базисных векторов$x = \lambda_1 a^1 + \cdots + \lambda_s a^s$,где$a^j = (a_1^j, \ldots, a_n^j)$,j=1,...s.

Запишем это в матричной форме $x = A\lambda$, где

$$A = \begin{pmatrix} a_1^1 & \ldots & a_1^s \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ a_n^1 & \ldots & a_n^s \end{pmatrix}$$

Обозначим через L взаимно однозначное отображение изZ_λ^s в симплициальный рациональный конус K, определяемое матрицей A,

$$L: Z_\lambda^s \leftrightarrow K \subset Z_x^n$$

Обозначим$z^A = (z_1^{a_1^1} \ldots z_n^{a_n^1}, \ldots, z_1^{a_1^s} \ldots z_n^{a_n^s})$.

На мономах $f(x)z^x, x \in K$ определим оператор D_i следующим образом

$$D_i\, f(x)z^x = \lambda_i f(x) z^{x-a^i},$$

гдеλ_i –i-якоордината точки$\lambda = (\lambda_1, \ldots, \lambda_s)$впредставлении$x = \lambda_1 a^1 + \cdots + \lambda_s a^s$.

Действие оператора на ряды $F(z) = \sum_{x\in K} f(x)z^x$ определяется по линейности.

Нетрудно проверить, что операторы D_i, $i = 1, \ldots, s$, линейны и удовлетворяют формуле Лейбница,т. е., что D_i– операторы дифференцирования.

Формальный ряд $F(z) = \sum_{x\in K} f(x)z^x$ с носителем в рациональном конусе K назовем D-финитным, если он удовлетворяет системе уравнений вида

$$Q_k^i(z)D_i^k F(z) + \ldots + Q_1^i(z)D_i F(z) + Q_0^i(z)F(z) = 0, i = 1, \ldots, s,$$

где$Q_j^i(z)$– многочленывида$\sum_{x\in K} q(x)z^x$.

Предложение 1

Ряд $\mathrm{F(z)} = \sum_{x\in K} \mathrm{f(x)z^x}$ является D-финитным тогда и только тогда, когда степеннойряд $F_A(\xi) = \sum_{\lambda\in Z_+^s} f(A\lambda)\xi^\lambda$, где $\xi = z^A$, является D-финитным в смысле определения (**).

Сформулируем основную теорему.

Теорема

Пусть f(x) решение задачи Коши (1), (2).Производящая функция $F(z) = \sum_{x\in K} \frac{f(x)}{z^x}$ решения f(x) D-финитна тогда и только тогда, когда D-финитна производящая функция начальных данных$\Phi_m(z) = \sum_{x\in K_m} \frac{\varphi(x)}{z^x}$.

Списоклитературы.

1. Bousquet-Mélou M. Linear recurrences with constantcoefficients: the multivariate case / M. Bousquet-Mélou, M. Petkovšek // Discrete Mathematics. – 2000. V. 225. – P. 51– 75.
2. Lipshitz L. D-Finite power series/ L. Lipshitz // Journal of Algebra. – 1989. V. 122. – P. 353-373.
3. Некрасова Т. И. Достаточные условия алгебраичности производящих функций решений многомерных разностных уравнений / Т. И. Некрасова // Известия Иркутского государственного университета. – 2013. – Т. 6, №3. – С. 88-96.
4. Стенли Р. Перечислительная комбинаторика. Деревья, производящие функции и симметрические функции / Р. Стенли. – М.: Мир, 2009. – 767 с.