УДК 517.98

ОБ ОДНОЙ НЕКОЭРЦИТИВНОЙ ЗАДАЧЕ ШТУРМА-ЛИУВИЛЛЯ ДЛЯ ОПЕРАТОРА ЛАМЕ

Пейчева А. С.,
научный руководитель д-р физ.-мат. наук, проф. Шлапунов А.А.
Сибирский федеральный университет

Пусть $D-$ ограниченная область с липшицевой границей в евклидовом пространстве $\mathbb{R}^3$. Мы будем рассматривать комплекснозначные функции, определенные в области D и ее замыкании $\overline{D}$. Для $s \in \mathbb{Z}_+$и $M \subset \overline{D}$ обозначим через $C^s(\overline{D}, M)$ множество sраз непрерывно дифференцируемых функций в $\overline{D}$, исчезающих в окрестности $\overline{M}$. Пусть $C_0^\infty(D)$ $-$ пространство гладких функций с компактным носителем в D. Функции класса Гельдера с показателем $0 < \alpha \leq 1$ на множестве $M \subset \mathbb{R}^3$обозначим через$C^{0,\alpha}(M)$.

Возьмем $S \in \partial D$ открытое, связное множество с кусочно-гладкой границей Y. Пусть $\rho \in C(\overline{D})$ естьC^1-гладкая функция в $\overline{D} \setminus Y$ такая, что $0 \leq \rho(x) \leq 1$, $x \in \overline{D}$, $\frac{\partial \rho}{\partial x_j} \in L^\infty(D)$, $1 \leq j \leq 3$ и $\rho(x) = 0 \Leftrightarrow x \in Y$, например, $\rho(x) -$ расстояние от $x \in D$ до Y. Обозначим через $H^{s,\gamma}(D)$ весовые пространства Соболевас гладкостью$s \in \mathbb{R}_+$ и весовой функцией ρ, а$\gamma \in \mathbb{R}$,как пополнение $C^s(\overline{D}, Y)$для$s \in \mathbb{Z}$ или $C^1(\overline{D}, Y)$для $s \in (0,1)$ по норме, индуцированной скалярным произведением

$$(u,v)_{H^{s,\gamma}(D)} = \sum_{|\alpha| \leq s} \left(\rho^{|\alpha|-\gamma-s}\partial^\alpha u, \rho^{|\alpha|-\gamma-s}\partial^\alpha v\right)_{L^2(D)}, s \in \mathbb{Z},$$

$$(u,v)_{H^{s,\gamma}(D)} = (u,v)_{H^{0,\gamma+s}(D)} + (\rho^{-\gamma}u, \rho^{-\gamma}v)_{H^s(D)}, \qquad s \in (0,1).$$

Для рассмотрения пространств с отрицательной гладкостью мы будем пользоваться стандартной конструкцией. Пусть H^+и $H^0 -$ комплексные пространства Гильберта соскалярными произведениями $(\cdot,\cdot)_+$ и $(\cdot,\cdot)_0$ соответственно.Предположим, чтоH^+ непрерывно вложено в H^0 и обозначим через $J_0 : H^+ \to H^0$ соответствующее вложение. Кроме того, предположим, что H^+ всюду плотно вH^0. Тогда пусть H^- будет пополнение H^+ относительно нормы

$$\|u\|_- = sup_{v \in H^+, v \neq 0} \frac{|(v,u)_0|}{\|v\|_{+,}}.$$

Следующая лемма хорошо известна.

Лемма 1. *Пространство БанахаH^- топологически изоморфно сопряженному пространству $(H^+)'$. Кроме того, изоморфизм определен эрмитовой формой*

$$\langle v,u \rangle = \lim_{\nu \to \infty}(v, u_\nu)_0$$

для$u \in H^-$и$v \in H^+$, где $\{u_\nu\} -$ какая-нибудь последовательность в H^+, сходящаяся к u в H^-. Кроме того, если вложение $J_0 : H^+ \to H^-$ компактно, то пространство H^0 компактно вложено вH^-.

Обозначим через

$$\mathcal{L}_0 = -\mu div \nabla - (\lambda + \mu)\nabla div$$

оператор Ламе в $\mathbb{R}^3$, где∇ $-$ оператор градиента в $\mathbb{R}^3$, а $\mu > 0$, $2\mu + \lambda > 0$ постоянные коэффициенты. Как хорошо известно, если функции μ, λ принадлежат $C^{0,1}(D)$, то при этих условиях оператор Ламе сильно эллиптичен и существует такой формально <<неотрицательный>>, самосопряженный оператор $\mathcal{L}_\mathfrak{D}(x,\partial) = \mathfrak{D}^* \mathfrak{D}$, который отличается от оператора Ламе слагаемыми низкого порядка; здесь $\mathfrak{D} = \sum_{j=1}^3 \mathfrak{D}_j \partial_j$ дифференциальный (4×3)-матричный оператор первого порядка, а

$\mathfrak{D}^*$формально сопряженный к нему. Один из примером факторизации и будет рассмотрен в докладе, а именно:

$$\mathfrak{D} = \begin{pmatrix} \sqrt{\mu}\, rot \\ \sqrt{2\mu + \lambda}\, div \end{pmatrix},$$

где rot понимаетсякак (3×3)-матричный оператор, строки которого имеют вид $(-1)^{i+j}\left(\ \vec{e}_i \frac{\partial}{\partial x_j} - \vec{e}_j \frac{\partial}{\partial x_i}\right), 1 \le i < j \le 3$, где $\vec{e}_i$ −единичный вектор в $\mathbb{R}^3$с -той компонентой, равной единице, представляющий завихренности или стандартный оператор вращения для данного случая.

Рассмотрим (3×3)-матричный линейныйдифференциальныйоператорAвобластиD, ассоциированныйс$\mathcal{L}_{\mathfrak{D}}(x, \partial)$,

$$A\, u = \mathfrak{D}^*\, \mathfrak{D}\, u + a_1 \mathfrak{D} u + a_0(x) u, \tag{1}$$

здесь a_0 и a_1 есть функциональные (3×3)- и (3×4)- матрицы соответственно, а для их компонент $a_j^{(p,q)}$ справедливо, что$\rho^2 a_0^{(p,q)} \in L^\infty(D)$, $\rho a_1^{(p,q)} \in L^\infty(D)$.

Пусть $\nu_{\mathfrak{D}} = \sum_{j=1}^3 \mathfrak{D}_j^* \nu_j\, \mathfrak{D}$ −конормальная производная, определеннаяотносительно оператора $\mathfrak{D}$, где $\nu = (\nu_1\,, \nu_2\,, \nu_3)$ векторное поле, состоящее из единичных внешних нормалей по отношению к∂D (определенное почти для всех точек $x \in \partial D$).

Теперь введем в рассмотрение граничный оператор

$$B = b_1(x) \nu_{\mathfrak{D}} + b_0(x) + \partial_\tau$$

где ∂_τ − это (3×3)- матрица, состоящая из касательных производных к ∂D. О (3×3)-матрицах$b_0(x)$ и $b_1(x)$ будем предполагать, что их компонентылокальноизмеримые,ограниченные функции на$\partial D \setminus Y$.Мы позволим матрице $b_1(x)$ вырождаться (и даже исчезать) на открытом связном подмножествеS поверхности ∂D, имеющем кусочно-гладкую границу ∂S; в этом случае предполагается, что матрица $b_0(x)$невырожденная на S, а компоненты касательной составляющей ∂_τ равны нулю на S.

Нашей целью будет решение следующей смешанной задачи: по данной обобщенной 3х-мерной векторной функции f в D, найти 3х-мерное векторное распределение u в D удовлетворяющее в подходящем смысле

$$\begin{cases} Au = f & \text{в } D, \\ Bu = 0 & \text{на } \partial D. \end{cases} \tag{2}$$

Так как при изучении спектральных свойств задачи мы будем использовать метод возмущении компактных, самосопряжённых операторов, то расщепим коэффициенты a_0 и b_0:

$$a_0 = a_{0,0} + \delta a_0, \qquad b_0 = b_{0,0} + \delta b_0,$$

где $a_{0,0}(x)$ − эрмитова неотрицательная функциональная (3×3)-матрица в D, для компонент которой справедливо, что $\rho^2 a_{0,0}^{(p,q)} \in L^\infty(D)$, а (3×3)-матрица$b_{0,0}$ выбрана так, что матрица $b_1^{-1} b_{0,0}$ эрмитова неотрицательна на∂D.

Пусть $a_{0,0} \ge 0$, матрица b_1 обратима, а $b_1^{-1} b_{0,0} \ge 0$.Решение задачи ищем в$H^{+,\gamma}(D)$, введенном как пополнение функций, гладких в $\overline{D}$ и исчезающих на $\bar{S}$, т.е. пространства $[C^1(\overline{D}, S)]^3$, по норме, индуцированной скалярным произведением

$$(u, v)_{+,\gamma,\mathfrak{D}} = (\mathfrak{D}\, u, \mathfrak{D} v)_{[H^{0,\gamma}(D)]^4} + \left(a_{0,0} u, v\right)_{[H^{0,\gamma}(D)]^3} + \left(b_1^{-1} b_{0,0} u, v\right)_{[H^{0,\gamma}(\partial D \setminus S)]^3},$$

а f берем из пространства $H^{-,\gamma}(D)$, двойственного к$H^{+,\gamma}(D)$.

В работе доказана теорема:

Теорема 1.*Пусть коэффициенты μ, λ принадлежат классу $C^\infty(X)$ в некоторой окрестности X компакта $\overline{D}$, а $\rho \equiv 1$. Тогда*

1. *Пространство $H^{+,\gamma}(D)$ непрерывно вложено в $[L^2(D)]^3$, еслисуществует $q > 0$ такое, что*
$$\rho^2 a_{0,0} \geq q I_3 \text{в } \overline{D} \setminus Y, \tag{3}$$
2. *Пространство $H^{+,\gamma}(D)$ непрерывно вложено в $\left[H^{\frac{1}{2}-\varepsilon,\gamma}(D)\right]^3$ для любого $\varepsilon > 0$, если*
$$b_1^{-1} b_{0,0} \geq c_1 I_3 \quad \text{на } \partial D \setminus S, \tag{4}$$

с некоторой постояннойс$_1 > 0$. Более того, если $\partial D \in C^2$, то из (4) следует, что $H^{+,\gamma}(D)$ непрерывно вложено в $\left[H^{\frac{1}{2},\gamma}(D)\right]^3$.

Перейдем к рассмотрению обобщенной постановки задачи Штурма-Лиувилля. С этой целью, предположим, что $H^{+,\gamma}(D) = H^+$ непрерывно вложено в $[H^{0,\gamma}(D)]^3 = H^0$(условия, когда это справедливо, были описаны выше) и обозначим через $H^{-,\gamma}(D) = H^-$ пополнение пространства $[H^{1,\gamma}(D,S)]^3$ по соответствующей отрицательной норме $\|u\|_{-,\gamma}$:
$$\|u\|_{-,\gamma} = \ sup_{v \in [H^{1,\gamma}(D,S)]^3,\ v \neq 0} \frac{\left|(v,u)_{[H^{0,\gamma}(D)]^3}\right|}{\|v\|_{+,\gamma}}.$$
Согласно лемме (1) пространство $H^{-,\gamma}(D)$ топологически изоморфно сопряженному $(H^{+,\gamma}(D))'$. Соответствующее спаривание, описанное в лемме (1) и определяющее изоморфизм, обозначим через $\langle \cdot, \cdot \rangle_\gamma$.

Кроме того, интегрируя по частям, получаем, что
$$(Au, v)_{[H^{0,\gamma}(D)]^3} = (\mathfrak{D}u, \mathfrak{D}v)_{[H^{0,\gamma}(D)]^4} + (b_1^{-1}(b_0 + \partial_\tau)\, u, v)_{[H^{0,\gamma}(\partial D \setminus S)]^3}$$
$$+\big((a_1 \mathfrak{D}\, u \ - \ 2\gamma\rho^{-1}(\mathfrak{D}\rho)^* \mathfrak{D} + a_0)u, v\big)_{[H^{0,\gamma}(D)]^4}$$
длявсех$u \in [H^{2,\gamma}(D,S)]^3$и$v \in [H^{1,\gamma}(D,S)]^3$, удовлетворяющихграничномуусловиюзадачи (2), здесь через $\mathfrak{D}\rho$ обозначенафункциональная матрица $\sum_{j=1}^3 \mathfrak{D}_j \frac{\partial \rho}{\partial x_j}$.

Предположим, что
$$|\delta b_0| \leq \widehat{c_1} |b_{0,0}| \text{ на } \partial D \setminus S$$
сположительнойпостоянной$\widehat{c_1}$.

Тогда, если
$$|\delta a_0| \leq \widehat{c_2}\ |a_{0,0}| \text{ на} \overline{D}$$
с положительнойпостоянной $\widehat{c_2}$, или (4) выполнены, мы имеем
$$\left|(b_1^{-1}(\delta b_0 + \partial_\tau)u, v)_{[L^2(\partial D \setminus S)]^3} + (a_1\, \mathfrak{D}\, u\ + \delta a_0 u, v)_{[L^2(D)]^3}\right| \leq \ c\|u\|_{+,\gamma} \|v\|_{+,\gamma} \tag{5}$$
для всех $u, v \in [H^{1,\gamma}(D, S \cup \mathrm{Y})]^3$, где c —некоторая положительная постоянная, независящая от u и v.

При выполнении условия (5), для каждого фиксированного$u \in H^{+,\gamma}(D)$ эрмитова форма
$$Q(u,v) = (\mathfrak{D}u, \mathfrak{D}v)_{[H^{0,\gamma}(D)]^4} + (b_1^{-1}(b_0 + \partial_\tau)\, u, v)_{[H^{0,\gamma}(\partial D \setminus S)]^3}$$
$$+\big((a_1 \mathfrak{D}u \ - \ 2\gamma\rho^{-1}(\mathfrak{D}\rho)^* \mathfrak{D} + a_0)u, v\big)_{[H^{0,\gamma}(D)]^4}$$
определяет непрерывный линейный функционал f на $H^{+,\gamma}(D)$ с помощьюравенства $f(v) := \overline{Q\ (u,v)}$, для $v \in H^{+,\gamma}(D)$. Согласно лемме (1), найдется единственный элемент $H^{-,\gamma}(D)$, который мы обозначим через Lu, такой, что
$$f\ (v) = \langle v, Lu \rangle_\gamma,$$

для всех $v \in H^{+,\gamma}(D)$. Таким образом, мы определили линейный оператор

$$L : H^{+,\gamma}(D) \to H^{-,\gamma}(D).$$

Как следует из (5), оператор L ограничен. Ограниченный линейный оператор

$$L_0 : H^{+,\gamma}(D) \to H^{-,\gamma}(D).$$

определенный этим способом через эрмитову форму $(\cdot,\cdot)_{+,\gamma}$, т.е.,

$$(v,u)_{+,\gamma} = \langle v, L_0 u\rangle_\gamma \qquad (6)$$

для всех $u,v \in H^{+,\gamma}(D)$, соответствуетслучаю$a_1 = \rho^{-1}\mathfrak{D}^*\rho$, $a_0 = a_{0,0}$ и $b_0 = b_{0,0}$.

Итак, мы приходим к обобщенной формулировке задачи (2) в весовых пространствах. По заданному элементу $f \in H^{-,\gamma}(D)$, найти $u \in H^{+,\gamma}(D)$ такую, что

$$\overline{Q(u,v)} = \langle v, f\rangle_\gamma \text{ для всех } v \in H^{+,\gamma}(D). \qquad (7)$$

В предположении, что всюду далее$\iota : H^{+,\gamma}(D) \to [H^{0,\gamma}(D)]^3$ есть естественное вложение, то для оператора L_0^{-1} справедлива следующая теорема:

Теорема 2.*Если $H^{+,\gamma}(D)$ непрерывно вложено в $[H^{0,\gamma}(D)]^3$, то обратный оператор L_0^{-1} к оператору (6)индуцирует положительные самосопряженные операторы*

$$\iota'\iota L_0^{-1} : H^{-,\gamma}(D) \to H^{-,\gamma}(D), \qquad \iota L_0^{-1}\iota' : [H^{0,\gamma}(D)]^3 \to [H^{0,\gamma}(D)]^3,$$
$$L_0^{-1}\iota'\iota : H^{+,\gamma}(D) \to H^{+,\gamma}(D),$$

которые имеют одинаковые системы собственных векторов и собственных значений; причем собственные значения - положительные. Более того, если $H^{+,\gamma}(D)$ непрерывно вложено в $[H^{s,\gamma}(D)]^3$ при $0 < s \le 1$, то эти операторы компактны, порядки их конечны и равны $2s$, а собственные вектора образуют ортогональные базисы в $H^{+,\gamma}(D), H^{-,\gamma}(D), [H^{0,\gamma}(D)]^3$.

Произведем следующее расщепление

$$\delta b_0 = \delta b_0^{(s)} + \delta b_0^{(c)},$$
$$\delta a_0 = \delta a_0^{(s)} + \delta a_0^{(c)},$$
$$\mathfrak{D} = 2\gamma\,\rho^{-1}(\mathfrak{D}\rho)^*\mathfrak{D} + \left(\delta a_1^{(s)} + \delta a_1^{(c)}\right)\mathfrak{D},$$

так, чтобыслагаемые$\delta b_0^{(c)}$, $\delta a_0^{(c)}$, $\delta a_1^{(c)}$ индуцировали компактные возмущения оператора $\mathcal{L}_\mathfrak{D}$, слагаемые $\delta b_0^{(s)}$, $\delta a_0^{(s)}$, $\delta a_1^{(s)} -$ достаточно маленькие. Этодаетвозможность максимально использовать теорию возмущения.

Теорема 3.*Пусть $\mathcal{L}_\mathfrak{D}(x,\partial) = \mathfrak{D}^*\mathfrak{D}$, и справедливо (4), λ,μ бесконечно дифференцируемы в некоторой окрестности $\overline{D}$, $\tau = 0$, $\delta b_0^{(c)} = 0$. Кроме того, пусть выполнено неравенство (3) или $\rho \equiv 1$. Если существует $\varepsilon > 0$ такое, что*

$$\rho^{2-\varepsilon}\delta a_0^{(c)} \in L^\infty(D), \qquad \rho^{1-\varepsilon}\delta a_1^{(c)} \in L^\infty(D)$$

и

$$\left|(b_1^{-1}\delta b_0^{(s)}u, v)_{[L^2(\partial D\setminus S)]^3} + \left(\delta a_1^{(s)}\mathfrak{D}u + \delta a_0^{(s)}u, v\right)_{[L^2(D)]^3}\right| \qquad (8)$$
$$\le M\|u\|_{+,\gamma}\|v\|_{+,\gamma}$$

для всех $u,v \in [H^{1,\gamma}(D, S\cup Y)]^3$ с некоторой постоянной $0 < M < 1$, независящей от u и v, то задача (7) фредгольмова.

Напомним, что ненулевой вектор u из области определения $D(T)$линейногооператора T на линейном пространстве H называется корневым вектором (или,обобщенным собственным вектором) для T, если найдутся номер $N \in \mathbb{N}$ и число $\lambda \in \mathbb{C}$,удовлетворяющие $(T-\lambda I)^N u = 0$, где $I : H \to H -$ тождественный оператор в H.Касательно корневых векторов, хотелось бы отметить, что в работе описаны условияполноты корневых функций для несамосопряженной возмущенной задачи в пространствах $H^{-,\gamma}(D)$, $[H^{0,\gamma}(D)]^3$, $H^{+,\gamma}(D)$.

Работа выполнена в Сибирском федеральном университете приподдержке гранта Правительства РФ (договор №14.Y26.31.0006) для поддержки исследований под руководством ведущих ученых.