УДК 735.29

О КОРНЕВЫХ ФУНКЦИЯХ ОДНОЙ НЕКОЭРЦИТИВНОЙ СМЕШАННОЙ ЗАДАЧИ ДЛЯ ОПЕРАТОРА ЭЛЛИПТИЧЕСКОГО С ПАРАМЕТРОМ

Полковников Александр Николаевич
научный руководитель доктор физ.-мат. наук, профессор Шлапунов А.А.
Сибирский Федеральный Университет

Пусть D - ограниченная область (открытое связное множество) в $\mathbb{C}^n$ с Липшицевой границей ∂D. Рассмотрим следующий дифференциальный оператор с параметром в дивергентной форме

$$A(z,\partial,\lambda) = A(z,\partial) + \lambda^2 a_0^{(2)}(z)u,$$

где оператор

$$A(z,\partial) = \sum_{i,j=1}^{n} \bar{\partial}_{\mathrm{i}}(\mathrm{a}_{\mathrm{i,j}}(\mathrm{z})\,\bar{\partial}_{\mathrm{j}}\mathrm{u}) + \sum_{j=1}^{n} \mathrm{a}_{\mathrm{j}}(\mathrm{z})\,\bar{\partial}_{\mathrm{j}}\mathrm{u} + \mathrm{a}_0(\mathrm{z})\mathrm{u}.$$

Коэффициенты $\mathrm{a}_{\mathrm{i,j}}(\mathrm{z}), \mathrm{a}_{\mathrm{j}}(\mathrm{z}), \mathrm{a}_0(\mathrm{z}), a_0^{(2)}(z)$ предполагаются ограниченными измеримыми функциями в D. Пусть $\mathrm{a}_{\mathrm{i,j}}(\mathrm{z})$ непрерывны вплоть до границы области D, тогда мы можем рассмотреть граничный оператор первого порядка

$$\mathrm{B(z)u} \;=\; \mathrm{b}_1(\mathrm{z})\,\bar{\partial}_{\mathrm{c}}\,\mathrm{u} \;+\; \mathrm{b}_0(\mathrm{z})\mathrm{u},$$

где $\bar{\partial}_{\mathrm{c}} = \sum_{j=1}^{n} \mathrm{a}_{i,\mathrm{j}}(\mathrm{z})(\upsilon_{\mathrm{j}}(\mathrm{z}) - \sqrt{-1}\,\upsilon_{\mathrm{j+n}}(\mathrm{z}))\;\bar{\partial}_{\mathrm{j}}$ это комплексная конормальная производная, а $\upsilon(\mathrm{z}) = (\upsilon_1(\mathrm{z}), \dots, \upsilon_{2\mathrm{n}}(\mathrm{z}))$ это единичный вектор нормали в точке z. Коэффициенты $\mathrm{b}_0(\mathrm{z})$ и $\mathrm{b}_1(\mathrm{z})$ так же предполагаются ограниченными измеримыми функциями на ∂D. Мы позволяем функции $\mathrm{b}_1(\mathrm{z})$ исчезать на открытом подмножестве $\mathrm{S} \subset \partial\mathrm{D}$ с кусочно-гладкой границей ∂S. Мы также предполагаем, что $\mathrm{b}_0(\mathrm{z}) \neq 0$ на $\partial\mathrm{D}\backslash\mathrm{S}$.

Так как мы хотим изучать возмущения самосопряженных операторов, разобьем $a_0(\mathrm{z})$и $\mathrm{b}_0(\mathrm{z})$ на две части

$$a_0(\mathrm{z}) = \mathrm{a}_{0,0}(\mathrm{z}) \;+\; \delta\mathrm{a}_0(\mathrm{z}),$$

$$\mathrm{b}_0(\mathrm{z}) = \mathrm{b}_{0,0}(\mathrm{z}) \;+\; \delta\mathrm{b}_0(\mathrm{z}),$$

где $\mathrm{a}_{0,0}(\mathrm{z})$ неотрицательная ограниченная функция в D а $\mathrm{b}_{0,0}(\mathrm{z})$ ограниченная функция на ∂D, удовлетворяющая $\mathrm{b}_{0,0}(\mathrm{z})/\mathrm{b}_1(\mathrm{z}) \neq 0$.

Обозначим через $H^1(\mathrm{D},\mathrm{S})$ пространство Соболева, состоящее из функций класса $H^1(\mathrm{D})$ и равных нулю на S. Тогда, если эрмитова форма

$$(\mathrm{u},\mathrm{v})_+ \; = \sum_{i,j=1}^{n} (\mathrm{a_{i,j}}(\mathrm{z})\,\bar{\partial}_\mathrm{j}\mathrm{u},\bar{\partial}_\mathrm{i}\mathrm{v})_{\mathrm{L^2(D)}} \; + \; (\mathrm{a_{0,0}}(\mathrm{z})\mathrm{u},\mathrm{v})_{\mathrm{L^2(D)}} + (\mathrm{b_{0,0}}(\mathrm{z})\mathrm{b}_1^{-1}\mathrm{u},\mathrm{v})_{\mathrm{L^2(\partial D\setminus S)}}$$

определяет скалярное произведение на $H^1(\mathrm{D},\mathrm{S})$, обозначим через $H^+(\mathrm{D})$ пополнение пространства $H^1(\mathrm{D},\mathrm{S})$ по норме, порожденной этим скалярным произведением. Пространство $H^+(\mathrm{D})$ непрерывно вложено в пространство Соболева-Слободецкого $H^{1\backslash 2-\varepsilon}(\mathrm{D})$ (см., например, [4] или [5]). В свою очередь через $H^-(\mathrm{D})$ обозначим пополнение пространства $H^1(\mathrm{D},\mathrm{S})$ по норме

$$\|u\|_- = \sup_{\substack{\mathrm{v}\in H^1(\mathrm{D},\mathrm{S})\\ \mathrm{v}\neq 0}} \frac{\left|(\mathrm{u},\mathrm{v})_{\mathrm{L^2(D)}}\right|}{\|\mathrm{v}\|_+}.$$

Рассмотрим следующую граничную задачу. Пусть дано распределение $g \in H^-(\mathrm{D})$ найти распределение $u \in H^+(\mathrm{D})$, удовлетворяющее

$$A(z,\partial,\lambda)u = g \text{ в } D,$$

$$\mathrm{B}(\mathrm{z})\mathrm{u} \; = 0 \text{ на } \partial D$$

в обобщенном смысле.

Для изучения задачи необходимо наложить некоторые ограничения на операторы $A(z,\partial,\lambda)$ и $\mathrm{B}(\mathrm{z})$. Мы предполагаем, что матрица

$$\left(\mathrm{a_{i,j}}(\mathrm{z})\right)_{i=1,\dots,n}$$

является эрмитовой и существует такая константа $\mathrm{m} > 0$, что

$$\sum_{i,j=1}^{n} \mathrm{a_{i,j}}(\mathrm{z})\xi_\mathrm{i}\xi_\mathrm{j} \geq \mathrm{m}|\xi|^2$$

для всех $(z,\xi) \in \mathrm{D} \times (\mathbb{R}^\mathrm{n}\backslash\{0\})$, то есть оператор $A(z,\partial)$ сильно эллиптичен. Вдобавок мы предполагаем, что оператор $A(z,\partial,\lambda)$ является эллиптическим с параметром оператором на луче $\Gamma \subset \mathbb{C}^\mathrm{n}$,

$$\Gamma = \; \{\lambda \in \mathbb{C}^\mathrm{n} \colon \arg\lambda = \; \varphi_\Gamma\},$$

где $0 < \varphi_\Gamma < 2\pi$, то есть

$$\sum_{i,j=1}^{n} \mathrm{a_{i,j}}(\mathrm{z})\xi_\mathrm{i}\xi_\mathrm{j} + \; \lambda^2 a_0^{(2)}(z) \neq 0$$

для всех $(z,\xi,\lambda) \in \overline{\mathrm{D}} \times [(\mathbb{R}^\mathrm{n} \times \Gamma)\backslash\{(0,0)\}]$.

Перейдем к слабой формулировке нашей задачи. Дано $g \in H^-(\mathrm{D})$, найти $u \in H^+(\mathrm{D})$ такое, что

$$\overline{Q(\mathrm{u},\mathrm{v})} = \langle \mathrm{v},\mathrm{g}\rangle = (\mathrm{v},\mathrm{Lu})_{+} \text{ для всех } v \in H^{+}(\mathrm{D}),$$

где

$$Q(\mathrm{u},\mathrm{v}) = \sum_{i,j=1}^{n} (\mathrm{a}_{\mathrm{i,j}}(\mathrm{z})\,\bar{\partial}_{\mathrm{j}}\mathrm{u}, \bar{\partial}_{\mathrm{i}}\mathrm{v})_{\mathrm{L}^2(\mathrm{D})} + \left(\left(\sum_{j=1}^{n} \mathrm{a}_{\mathrm{j}}(\mathrm{z})\,\bar{\partial}_{\mathrm{j}} + \mathrm{a}_0(\mathrm{z}) + \lambda^2 a_0^{(2)}(z)\right)\mathrm{u},\mathrm{v}\right)_{\mathrm{L}^2(\mathrm{D})}$$
$$+ (\mathrm{b}_0(\mathrm{z})\mathrm{b}_1^{-1}\mathrm{u},\mathrm{v})_{\mathrm{L}^2(\partial\mathrm{D}\backslash\mathrm{S})}.$$

Справедлива следующая теорема

Теорема 1. *Пусть неравенство*

$$|\delta b_0(z)| \le c_1 |b_{0,0}| \quad \text{на } \partial D\backslash S$$

выполнено с некоторой константой $0 < c_1 < 1$. *Если при этом* $\delta b_0(z) b_1^{-1} \ge c_2$, *где* $c_2 > 0$, *то* $\{L(\lambda)\}_{\lambda\in\mathbb{C}^n}$ *является голоморфным семейством фредгольмовых операторов.*

Пусть теперь B - банахово пространство и $\mathcal{L}(B)$ - алгебра всех ограниченных линейных операторов, действующих в B. Предположим, что $\lambda \in \mathbb{C}^n$ и $F(\lambda)$ есть голоморфная функция в проколотой окрестности точки λ_0, принимающая значения из $\mathcal{L}(B)$.

Точку λ_0 назовем характеристическим значением $F(\lambda)$, если существует голоморфная функция $u(\lambda)$ в окрестности точки λ_0 со значениями из B такая, что $u(\lambda_0) \ne 0$, но $F(\lambda)u(\lambda)$ есть голоморфная функция около λ_0, исчезающая в этой точке. Функцию $u(\lambda)$ назовем корневой функцией $F(\lambda)$ в точке λ_0.

Тогда справедлива следующая теорема.

Теорема 2. *Пусть выполнены условия предыдущей теоремы. Если дополнительно* $b_0 = b_{0,0}$, *то система корневых функций оператора* $L_0^{-1}L(\lambda)$ *полна в* $H^{+}(D)$, $H^{-}(D)$ *и* $L^2(D)$.

Список литературы

[1] Keldysh, M.V., On the completeness of eigenfunctions of some classes of non-selfadjoint linear operators, Uspekhi Mat. Nauk, 26, (1971), No.~160 (4), 15-–41.

[2] Agranovich M.S., Spectral Problems in Lipschitz Domains, Modern Mathematics, fundamental Trends 39 (2011), 11–35 (Russian).

[3] Schechter M., Negative norms and boundary problems, Ann. Math. 72 (1960), No.~3, 581--593.

[4] Shlapunov A.A., Tarkhanov N., On completeness of root functions of Sturm-Liouville problems with discontinuous boundary operators, Journal of Differential Equations 10 (2013), 3305--3337.

[5] Polkovnikov A.N., Shlapunov A.A., On the spectral properties of a non-coercive mixed problem associated with $\overline{\partial}$ - operator, J. Siberian Fed. Uni. 6(2) (2013), 3305--3337.