УДК 519.178

# ПРОБЛЕМЫ СБАЛАНСИРОВАННОСТИ ЗНАКОВЫХ ГРАФОВ

**Махонин И.В., Демиденко В.А.,**
**научный руководитель д-р физ.-мат. наук БыковаВ.В.**
***Сибирский федеральный университет***

Неориентированные графы являются подходящей моделью для представления отношений между людьми. Люди изображаются вершинами графа, причем если между лицами$a$ и$b$ имеется симпатия или антипатия, то между вершинами $a$ и$b$проводится ребро. Аналогичная модель возникает, если отношение «симпатии –антипатии» заменить отношением «общаться – избегать», «соглашаться – не соглашаться». Как правило, такие отношения симметричные. Их описывают с помощью знаковых графов.

Пусть задан неориентированный граф$G = (V,E)$, где $V$ – конечное множество вершин графа, а $E$ – множество ребер. Знаковым графом называется неориентированный граф, каждое ребро которого отмечено знаком «+» или «–».

Исследования знаковых графов сводятся к трем основным задачам:

- проверка сбалансированности знаковых графов,
- вычисление меры сбалансированности знаковых графов,
- установление знакового баланса – нахождение набора ребер графа (желательно минимального),изменение знаков которых обеспечивает сбалансированность заданного графа.

Американский математикХарари вместе с психологом Картрайт предложили следующееопределение сбалансированности знакового графа: граф считается сбалансированным, если множество его вершин можно разбить на два подмножества таким образом, что любое ребро, соединяющее вершины из одного множества, имеет знак «+», а ребра, соединяющие вершины из разных подмножеств, знак «–». Причем второе подмножество может оказаться пустым.

Знаком цикла знакового графа называется произведение знаков всех его ребер. Если цикл имеет знак «+», то цикл называется положительным, в противном случае отрицательным.

**Теорема** (Картрайт–Харари). Следующие утверждения эквивалентны:
1. $G$ – сбалансированный граф.
2. Любой цикл графа $G$ положительный.
3. Любые две цепи между вершинами $u$и $v$ имеют одинаковый знак.

Данная теорема указывает конструктивный способ проверки сбалансированности знакового графа. Например такую проверку можно выполнить, используя алгоритм обхода вершин графа в глубину или в ширину.

Вероятность того, что случайно выбранный полный граф сбалансирован, крайне мала.Поэтому интересен вопрос, насколько сбалансирован несбалансированный граф. Один из способов ответа на него – это мера сбалансированности.Мера сбалансированности знакового графа $G$ есть доля простых положительных циклов к общему числу циклов этого графа.Можно показать, что вычисление меры сбалансированности требует $O(n^2 \cdot 2^n)$операций. Например, для полного графа с $n$ вершинами общее число циклов графа равно

$$|C| = \sum_{k=3}^{n} \frac{n!}{(n-k)! \cdot 2k}.$$

Граф, изображенный на рисунке, имеет меру сбалансированности 2/3.

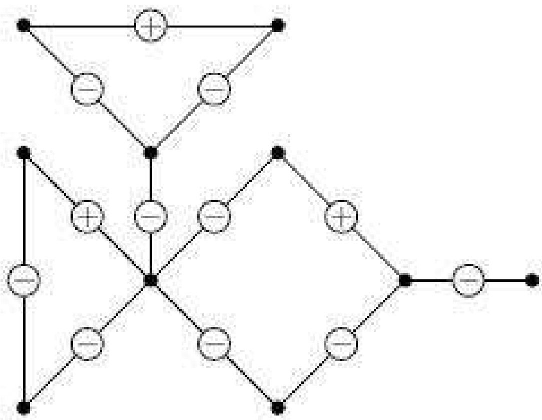

Рис. 1. Граф с положительными и отрицательными циклами.
Граф не сбалансирован и имеет меру сбалансированности 2/3

Процедура сбалансированности знакового графа связана с переменой знаков его ребер. Возможны три основныеформулировки проблемы знакового баланса:

1. Нахождение минимального (по вхождению)множества ребер графа, изменение знаков которых обеспечит сбалансированность.
2. Установлениенекоторого набора допустимых множеств ребер, каждое из которых обеспечит сбалансированность графа.
3. Применение переборных процедур для перечисления всех допустимых вариантов сбалансированности.

Приведенные выше формулировки проблемы знакового баланса приводят к трем комбинаторным NP-трудным задачам. Для них пока неизвестны алгоритмы нахождения точных решений за полиномиальное время. В первом случае речь идет о построенииоптимального решения. Втораяформулировка приводит к некоторым вариантам допустимого решения. Третьяформулировка– NP-трудная переборная задача. В данных формулировках условие сбалансированности графа можно заменить мерой сбалансированности. Однако это существенно увеличивает сложность вычислений.

В настоящий момент показано, что проверку сбалансированности графа общего вида можно выполнить за полиномиальное время. Такой алгоритм разработан в среде Си ++.Ведется разработка алгоритмов проблемы знакового баланса в оптимизационной формулировке с использованием матричных уравнений.