УДК 735.29

# ЭВЕНТОЛОГИЧЕСКИЕ РАСПРЕДЛЕНИЯ ФРАНКА

**Шангареева Л.Ю.,**
**научный руководитель канд. физ.-мат. наук Семенова Д.В.**
***Сибирский Федеральный Университет***

Многие из статистических систем природы и общества можно определить как случайное множество событий, образующих своеобразную структуру статистических взаимосвязей случайных событий друг с другом. Случайное множество событий — это случайный элемент со значениями из множества всех подмножеств конечного множества выделенных событий. Основная идея современной теории случайных множеств состоит в том, что структура статистических взаимозависимостей подмножеств конечного множества полностью определяется распределением случайного множества, заданного на множестве всех его подмножеств. Таким образом, изучение структур статистических взаимосвязей случайных событий означает, в итоге, изучение вероятностных распределений соответствующих случайных множеств событий.

Рассмотрим всеобщее вероятностное пространство $(\Omega, \mathsf{F}, \mathbf{P})$. Пусть $\mathsf{X} \subset \mathsf{F}$ - конечное множество событий, выбранное из алгебры $\mathsf{F}$ этого пространства. Рассмотрим случайное множество событий $K:(\Omega,\mathsf{F},\mathbf{P}) \to \left(2^{\mathsf{X}}, 2^{2^{\mathsf{X}}}\right)$, заданное под $\mathsf{X}$. Вероятностное распределение случайного множества событий $K$ можно представить несколькими эквивалентными распределениями вероятностей, порождённых этим множеством событий:

- эвентологическое распределение (Э-распределение) I-го рода – набор из $2^{|\mathsf{X}|}$ вероятностей вида $\{p(X), X \subseteq \mathsf{X}\}$, где $p(X) = P(K = X) = P\left(\bigcap_{x\in X} x \bigcap_{x\in X^c} x^c\right)$;
- Э-распределение II-го рода – набор из $2^{|\mathsf{X}|}$ вероятностей вида $\{p_X, X \subseteq \mathsf{X}\}$, где $p_X = P(X \subseteq K) = P\left(\bigcap_{x\in X} x\right)$.

Существует удобный инструмент анализа структур эвентологической зависимости – ковариация. Для множества событий $X \subseteq \mathsf{X}$ $|\mathsf{X}|$-арная ковариация определяется по формуле:

$$Kov_X = P\left(\bigcap_{x\in X} x\right) - \prod_{x\in X} P(x),\ X \subseteq \mathsf{X}.$$

Ковариация $Kov_X$ обращается в нуль, когда события из $X$ независимы; больше нуля, когда события из множества $X$ статистически притягиваются; и меньше нуля, когда события из множества $X$ статистически отталкиваются.

**Определение 1**. Ассоциативным случайным множеством событий $K$ под конечным множеством избранных событий $\mathsf{X}$ с Э-распределением II-го рода $\{p_X, X \subseteq \mathsf{X}\}$, где для всех $X \subseteq \mathsf{X}, |X| > 1$ вероятности пересечения множеств событий $p_X$ определяются рекурентным соотношением при известных вероятностях событий $p_x = \mathrm{P}(x), x \in \mathsf{X}$ и известной ассоциативной функции

$$AED:[0;1]^2 \to [0;1]$$

$$p_{xy} = P\left(x \bigcap y\right) = AED\left(p_x, p_y\right),$$

$$p_{xyz} = P\left(x \bigcap y \bigcap z\right) = AED\left(p_x, AED\left(p_y, p_z\right)\right) = AED\left(p_x, P\left(y \bigcap z\right)\right),$$

$$p_X = P\left(\bigcap_{x \in X} x\right) = AED\left(p_x, P\left(\bigcap_{y \in X \setminus x} y\right)\right),$$

при условии, что соответствующее Э-распределение I-го рода будет легитимным.

В теории множеств случайных событий под ассоциативной функцией мы понимаем непрерывную t-норму, удовлетворяющей условию Липшица, или, что эквивалентно, ассоциативную, коммутативную копулу. Э-распределения, определяемые функциями $AED$ будем называть ассоциативными Э-распределениями. Таким образом, ассоциативное случайное множество событий полностью определяется своим ассоциативным Э-распределением.

Особенность подхода описания вероятностных распределений множества случайных событий с помощью аппарата ассоциативных функций заключается в том, что для определения вероятностного распределения случайного множества событий достаточно знать всего $|\mathrm{X}|$ вероятностей событий и вид ассоциативной функции, тогда как в общем случае вероятностное распределение случайного множества событий определяется $2^{|\mathrm{X}|}$ параметрами. Заметим еще раз, что в теории множеств случайных событий под ассоциативной функцией понимается непрерывная t-норма, удовлетворяющая условию Липшица, или, что эквивалентно, ассоциативную, коммутативную копулу.

В данной работе введено параметрическое семейство Франка случайных множеств событий на основе соответствующей треугольной нормы. Доказаны следующие теоремы.

**Теорема 1.** Пусть вероятности событий $p_x = \mathrm{P}(x) > 0, x \in \mathrm{X}$. Тогда ассоциативная функция

$$AED(a,b) = -\frac{1}{\alpha}\ln\left(1 + \frac{(e^{-\alpha a} - 1)(e^{-\alpha b} - 1)}{e^{-\alpha} - 1}\right), \quad \alpha \in (-\infty; +\infty) \setminus \{0\}$$

определяет ассоциативное случайное множество Франка с Э-распределением II рода:

$$p_X = -\frac{1}{\alpha}\ln\left(1 + \frac{\prod_{x \in X}(e^{-\alpha p_x} - 1)}{(e^{-\alpha} - 1)^{|X|}}\right), \quad X \subseteq \mathrm{X}.$$

Доказательство теоремы проводится индукцией по мощности множества $|\mathrm{X}|$.

**Теорема 2.** Для ассоциативного случайного множества Франка, все арные ковариации $Kov_X$, $X \subseteq \mathrm{X}, |X| > 1$, имеют вид

$$Kov_X = -\frac{1}{\alpha}\ln\left(\left(1 + \frac{\prod_{x \in X}(e^{-\alpha p_x} - 1)}{(e^{-\alpha} - 1)^{|X|}}\right) \cdot e^{\prod_{x \in X} p_x}\right), \quad X \subseteq \mathrm{X}.$$

Знак ковариации определяется знаком параметра $\alpha \in (-\infty; +\infty) \setminus \{0\}$.