УДК 735.29

ЧИСЛЕННОЕ ОПРЕДЕЛЕНИЕ ФУНКЦИЙ ИСТОЧНИКОВ СПЕЦИАЛЬНОГО ВИДА ДЛЯ СИСТЕМЫ ДВУХ УРАВНЕНИЙ ПАРАБОЛИЧЕСКОГО ТИПА

Горохов А.А.

научный руководитель канд. физ.-мат. наук, доцент Распопов В.Е.

Сибирский Федеральный Университет

Институт математики и фундаментальной информатики

Рассмотрим следующую задачу. В области $D=\{(t,x)|\ 0\le t\le 1, 0\le x\le 1\}$ найти функции $u(t,x)$, $v(t,x)$ и произведение функций $f_1(t)g_1(x)$ и $f_2(t)g_2(x)$, удовлетворяющие задаче:

$$\begin{aligned} u_t(t,x) &= u_{xx}(t,x)+a_1u_x(t,x)+b_1v_x(t,x)+f_1(t)g_1(x),\\ v_t(t,x) &= v_{xx}(t,x)+a_2u_x(t,x)+b_2v_x(t,x)+f_2(t)g_2(x). \end{aligned} \tag{1}$$

$$u(0,x_j)=u_0(x_j),\ \ 0\le x\le 1, j=\overline{0,1}, \qquad v(0,x_j)=v_0(x_j), 0\le x\le 1, j=\overline{0,1}, \tag{2}$$

$$u_x(t,0)=\psi_1(t),\ \ 0\le t\le 1, \qquad v_x(t,0)=\psi_3(t),\ \ 0\le t\le 1, \tag{3}$$

$$u_x(t,1)=\psi_2(t),\ \ 0\le t\le 1, \qquad v_x(t,1)=\psi_4(t),\ \ 0\le t\le 1, \tag{4}$$

$$u(T,x)=\alpha_1(x),\ \ 0\le x\le 1, \qquad v(T,x)=\alpha_2(x),\ \ 0\le x\le 1, \tag{5}$$

$$u(t,\xi)=\beta_1(t),\ \ \ 0\le t\le 1. \qquad v(t,\xi)=\beta_2(t),\ \ \ 0\le t\le 1. \tag{6}$$

где (2)– начальные условия, (3),(4) – краевые условия, (5),(6) – условия переопределения, $\psi_1(t)$, $\psi_2(t)$, $\psi_3(t)$, $\psi_4(t)$, $\alpha_1(x)$, $\alpha_2(x)$, $\beta_1(t)$, $\beta_2(t)$ – заданные функции, $u_0(x_j)$, $v_0(x_j)$ – заданные числа, a_1, a_2, b_1, b_2 – заданные константы, ξ – фиксированная точка из интервала (0,1).

Считаем, что все известные функции достаточное число раз непрерывно дифференцируемы, и выполняются условия согласования.

Поставленная задача относится к классу коэффициентных обратных задач. Данную задачу буду решать численно. Теоремы о существование и единственности классического решения поставленной задачи мне неизвестно.

Предполагая, что начальные условия заданы с помощью непрерывных и непрерывно дифференцируемых функций $u_0(x)$ и $v_0(x)$. Используя начальные условия и условия переопределения, после ряда аналитических выкладок, получаем выражения для $f_1(t)g_1(x)$ и $f_2(t)g_2(x)$:

$$f_1(t)g_1(x) = \frac{\left(u_t(0,x)-u_0''(x)-a_1u_0'(x)-b_1v_0'(x)\right)\left(\beta_1'(t)-u_{xx}(t,\xi)-a_1u_x(t,\xi)-b_1v_x(t,\xi)\right)}{\beta_1'(0)-u_0''(\xi)-a_1u_0'(\xi)-b_1v_0'(\xi)}, \tag{7}$$

$$f_2(t)g_2(x) = \frac{\left(v_t(0,x)-v_0''(x)-a_2u_0'(x)-b_2v_0'(x)\right)\left(\beta_2'(t)-v_{xx}(t,\xi)-a_2u_x(t,\xi)-b_2v_x(t,\xi)\right)}{\beta_2'(0)-v_0''(\xi)-a_2u_0'(\xi)-b_2v_0'(\xi)}. \tag{8}$$

Подставляя выражения (7), (8) для $f_1(t)g_1(x)$, $f_2(t)g_2(x)$ в (1), и вводя новые неизвестные по формулам $W(t,x)=u_{tx}(t,x)$, $V(t,x)=v_{tx}(t,x)$, после ряда аналитических выкладок, получаем следующую прямую задачу:

$$\begin{aligned}
&W_t(t,x)=W_{xx}(t,x)+a_1W_x(t,x)+b_1V_x(t,x)+\\
&+\frac{\left(W(0,x)-u_0'''(x)-a_1u_0''(x)-b_1v_0''(x)\right)\left(\beta_1''(t)-W_x(t,\xi)-a_1W(t,\xi)-b_1V(t,\xi)\right)}{\beta_1'(0)-u_0''(\xi)-a_1u_0'(\xi)-b_1v_0'(\xi)},\\
&V_t(t,x)=V_{xx}(t,x)+a_2W_x(t,x)+b_2V_x(t,x)+\\
&+\frac{\left(V(0,x)-v_0'''(x)-a_2u_0''(x)-b_2v_0''(x)\right)\left(\beta_2''(t)-V_x(t,\xi)-a_2W(t,\xi)-b_2V(t,\xi)\right)}{\beta_2'(0)-v_0''(\xi)-a_2u_0'(\xi)-b_2v_0'(\xi)}.
\end{aligned} \tag{9}$$

$$\begin{aligned}
&W(0,x)=W(T,x)\frac{\beta_1'(0)-u_0''(\xi)-a_1u_0'(\xi)-b_1v_0'(\xi)}{\beta_1'(T)-\alpha_1''(\xi)-a_1\alpha_1'(\xi)-b_1\alpha_2'(\xi)}-\\
&-\frac{\left(\alpha_1'''(x)+a_1\alpha_1''(x)+b_1\alpha_2''(x)\right)\left(\beta_1'(0)-u_0''(\xi)-a_1u_0'(\xi)-b_1v_0'(\xi)\right)}{\beta_1'(T)-\alpha_1''(\xi)-a_1\alpha_1'(\xi)-b_1\alpha_2'(\xi)}+\\
&+u_0'''(x)+a_1u_0''(x)+b_1v_0''(x),\\
&V(0,x)=V(T,x)\frac{\beta_2'(0)-v_0''(\xi)-a_2u_0'(\xi)-b_2v_0'(\xi)}{\beta_2'(T)-\alpha_2''(\xi)-a_2\alpha_1'(\xi)-b_2\alpha_2'(\xi)}-\\
&-\frac{\left(\alpha_2'''(x)+a_2\alpha_1''(x)+b_2\alpha_2''(x)\right)\left(\beta_2'(0)-v_0''(\xi)-a_2u_0'(\xi)-b_2v_0'(\xi)\right)}{\beta_2'(T)-\alpha_2''(\xi)-a_2\alpha_1'(\xi)-b_2\alpha_2'(\xi)}+\\
&+v_0'''(x)+a_2u_0''(x)+b_2v_0''(x).
\end{aligned} \tag{10}$$

$$\begin{aligned}
W(t,0)&=\psi_1'(t), & W(t,1)&=\psi_2'(t),\\
V(t,0)&=\psi_3'(t), & V(t,1)&=\psi_4'(t).
\end{aligned} \tag{11}$$

После того, как задача (9)-(11) решена $u(t,x)$, $v(t,x)$, $f_1(t)g_1(x)$ и $f_2(t)g_2(x)$ восстанавливаются по формулам:

$$u(t,x)=\int_\xi^x\int_0^t W(\tau,\eta)d\tau d\eta+u_0(x)-u_0(\xi)+\beta_1(t),$$

$$v(t,x)=\int_\xi^x\int_0^t V(\tau,\eta)d\tau d\eta+v_0(x)-v_0(\xi)+\beta_2(t),$$

$$f_1(t)g_1(x)=\frac{\left(\int_\xi^x W(0,\eta)d\eta+\beta_1'(0)-u_0''(x)-a_1u_0'(x)-b_1v_0'(x)\right)}{\beta_1'(0)-u_0''(\xi)-a_1u_0'(\xi)-b_1v_0'(\xi)}\cdot$$

$$\cdot\Big(\beta_1'(t)-\int_0^t W_x(\tau,\xi)d\tau-a_1\int_0^t W(\tau,\xi)d\tau-b_1\int_0^t V(\tau,\xi)d\tau-u_0''(\xi)-a_1u_0'(\xi)-$$

$$-b_1v_0'(\xi)\Big),$$

$$f_2(t)g_2(x)=\frac{\left(\int_\xi^x V(0,\eta)d\eta+\beta_2'(0)-v_0''(x)-a_2u_0'(x)-b_2v_0'(x)\right)}{\beta_2'(0)-v_0''(\xi)-a_2u_0'(\xi)-b_2v_0'(\xi)}\cdot$$

$$\cdot\Big(\beta_2'(t)-\int_0^t V_x(\tau,\xi)d\tau-a_2\int_0^t W(\tau,\xi)d\tau-b_2\int_0^t V(\tau,\xi)d\tau-v_0''(\xi)-a_2u_0'(\xi)-$$

$-b_2 v_0'(\xi)\Big).$

Функции $u_0(x)$, $v_0(x)$, заданные таблицей, были аппроксимированы кубическим сплайном.

Задача (9)-(11) – это неклассическая прямая задача с нелокальными начальными данными. Эту задачу решать будем численно. Строим сетку и аппроксимируем её разностной задачей:

$$\frac{P_j^{n+1}-P_j^n}{\tau} = \frac{P_{j+1}^{n+1}-2P_j^{n+1}+P_{j-1}^{n+1}}{h^2} + a_1\frac{P_{j+1}^n-P_{j-1}^n}{2h} + b_1\frac{R_{j+1}^n-R_{j-1}^n}{2h} + \frac{\left(P_j^0 - u_0'''(x_j) - a_1 u_0''(x_j) - b_1 v_0''(x_j)\right)\left(\beta_1''(t_n) - \frac{P_{k+1}^n - P_{k-1}^n}{2h} - a_1 P_k^n - b_1 R_k^n\right)}{\beta_1'(0) - u_0''(x_k) - a_1 u_0'(x_k) - b_1 v_0'(x_k)},$$

$j=\overline{1,N-1}$, $n=\overline{0,M-1}$.

$$\frac{R_j^{n+1}-R_j^n}{\tau} = \frac{R_{j+1}^{n+1}-2R_j^{n+1}+R_{j-1}^{n+1}}{h^2} + a_2\frac{P_{j+1}^n-P_{j-1}^n}{2h} + b_2\frac{R_{j+1}^n-R_{j-1}^n}{2h} + \frac{\left(R_j^0 - v_0'''(x_j) - a_2 u_0''(x_j) - b_2 v_0''(x_j)\right)\left(\beta_2''(t_n) - \frac{R_{k+1}^n - R_{k-1}^n}{2h} - a_2 P_k^n - b_2 R_k^n\right)}{\beta_2'(0) - v_0''(x_k) - a_2 u_0'(x_k) - b_2 v_0'(x_k)},$$

$j=\overline{1,N-1}$, $n=\overline{0,M-1}$.

$$P_j^0 = P_j^N \frac{\beta_1'(0) - u_0''(x_k) - a_1 u_0'(x_k) - b_1 v_0'(x_k)}{\beta_1'(T) - \alpha_1''(x_k) - a_1\alpha_1'(x_k) - b_1\alpha_2'(x_k)} - \frac{\left(\alpha_1'''(x_j) + a_1\alpha_1''(x_j) + b_1\alpha_2''(x_j)\right)\left(\beta_1'(0) - u_0''(x_k) - a_1 u_0'(x_k) - b_1 v_0'(x_k)\right)}{\beta_1'(T) - \alpha_1''(x_k) - a_1\alpha_1'(x_k) - b_1\alpha_2'(x_k)} + u_0'''(x_j) + a_1 u_0''(x_j) + b_1 v_0''(x_j),$$

$j=\overline{0,N}$.

$$R_j^0$$
$$= R_j^N \frac{\beta_2'(0) - v_0''(x_k) - a_2 u_0'(x_k) - b_2 v_0'(x_k)}{\beta_2'(T) - \alpha_2''(x_k) - a_2 \alpha_1'(x_k) - b_2 \alpha_2'(x_k)}$$
$$- \frac{\left(\alpha_2'''(x_j) + a_2 \alpha_1''(x_j) + b_2 \alpha_2''(x_j)\right)\left(\beta_2'(0) - v_0''(x_k) - a_2 u_0'(x_k) - b_2 v_0'(x_k)\right)}{\beta_2'(T) - \alpha_2''(x_k) - a_2 \alpha_1'(x_k) - b_2 \alpha_2'(x_k)}$$
$$+ v_0'''(x_j) + a_2 u_0''(x_j) + b_2 v_0''(x_j).$$

$j = \overline{0, N}$.

считаем, что точке ξ соответствует узел с номером k

$$P_0^n = \psi_1'(t) \qquad R_0^n = \psi_3'(t)$$
$$P_1^n = \psi_2'(t) \qquad R_1^n = \psi_4'(t)$$

Разностную задачу решаем итерационным методом последовательно по слоям по времени. На нулевой итерации полагаем:

$$P_j^N(0) = \left(1 - x_j\right) \psi_1'(t^N) + x_j \psi_2'(t^N),$$
$$R_j^N(0) = \left(1 - x_j\right) \psi_3'(t^N) + x_j \psi_4'(t^N).$$

Итерационный процесс ведем до тех пор, пока не будут выполняться следующие условия:

$$\left\|W^{(S+1)}(T, x) - W^{(S)}(T, x)\right\| \le \varepsilon,$$

$$\left\|V^{(S+1)}(T, x) - V^{(S)}(T, x)\right\| \le \varepsilon.$$

где $0 \le x \le 1$, S – номер итерации, ε – заданное малое число.

Предложенный алгоритм был апробирован на ряде тестов. На всех рассмотренных тестах, итерационный процесс сошелся за 4-6 итерации. С уменьшение шагов сетки, численное решение стремилось к точному.