УДК 51

СРАВНИТЕЛЬНЫЙ АНАЛИЗ РАЗЛИЧНЫХ МЕТОДОВ РЕШЕНИЯ ГЕОМЕТРИЧЕСКИХ ЗАДАЧ

Цветков Н.В.,

научный руководитель преподаватель математики Меньших Л.Л.

Муниципальное бюджетное общеобразовательное учреждение "Лицей №174"

В наше время, в условиях развития рыночной экономики, когда наблюдается небывалый рост объема информации, от каждого человека требуется высокий уровень профессионализма и такие деловые качества как предприимчивость, способность ориентироваться, быстро и безошибочно принимать решения, а это невозможно без умения работать творчески и самостоятельно.

Математика является наиболее важным и удобным предметом для развития творческих способностей учащихся. Этому способствует логическое построение предмета, четкая система упражнений для закрепления полученных знаний и абстрактный язык математики.

Воспитание самостоятельности постепенно в течение всего периода обучения предусматривает способность полноценно аргументировать, выделять главное, существенное, умение рассуждать, доказывать, находить рациональные пути, делать соответствующие выводы, обобщать и применять их при решении конкретных вопросов. В этом состоит ***актуальность*** данной работы.

Объектом исследования в данной работе являются геометрические задачи, т.к. их решение представляют наибольшую трудность у школьников**.** ***Предметом исследования*** являются аналитические методы, с помощью которых мы решаем данные задачи. ***Гипотеза*** **–** все методы решения геометрических задач равноценны.

Цель работы: рассмотреть различные методы решения геометрических задач.

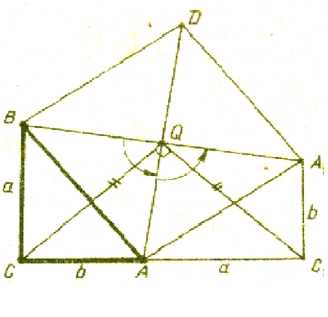
Решая одну и ту же задачу различными методами, можно лучше понять специфику того или иного метода, его преимущества и недостатки в зависимости от содержания задачи. Решение задач несколькими способами помогает установить связи между, казалось бы, совершенно разнородными темами школьного курса математики.

Для реализации цели были поставлены следующие ***задачи***:

1. Изучить литературу по исследуемому вопросу: геометрическая задача, «идея» решения.
2. Рассмотреть различные приемы решения геометрических задач школьного курса и классифицировать их.
3. Провести сравнительный анализ различных приемов решения геометрических задач школьного курса.
4. Разработать принципы успешности обучения.

Методы исследования:

1. Изучение литературных источников.
2. Метод анализа, синтеза, обобщения.
3. Метод сравнения.



1) Метод геометрических преобразований

З а д а ч а: На гипотенузе AB прямоугольного треугольника ABC построен квадрат ABDE в той полуплоскости от прямой AB, которой не принадлежит треугольник ABC. Найти расстояние от вершины C прямого угла до центра квадрата, если катеты BC и AC имеют соответственно длины a *и* b.

Дано: AC=b, BC=a, ABDE- квадрат, <C=90°; *Найти: CQ*

Решение: Выполним поворот около центра Q квадрата на 90°: $B \to A$, $A \to A_1$, $C \to C_1$. Так как $\angle A_1AC_1 = \angle CBA$, то $\angle CAB + \angle BAA_1 + \angle A_1AC_1 = 180°$, и поэтому точки C,A,C1 лежат на одной прямой. В треугольнике CQC_1 угол CQC_1 прямой (угол поворота), $CQ = C_1Q$, $CC_1 = AC_1 = a+b$. Следовательно, $CQ = \dfrac{a+b}{\sqrt{2}}$.

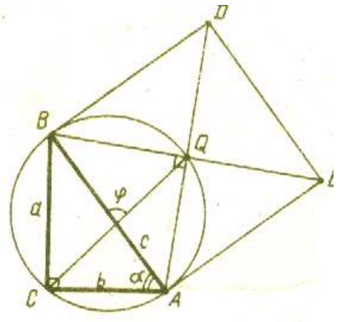
Ответ: $\dfrac{a+b}{\sqrt{2}}$.

Выводы по методу геометрических преобразований:

Для подготовленного учащегося данный метод является быстрым и удобным.

2) метод площадей

З а д а ч а: На гипотенузе AB прямоугольного треугольника ABC построен квадрат ABDE в той полуплоскости от прямой AB, которой не принадлежит треугольник ABC. Найти расстояние от вершины C прямого угла до центра квадрата, если катеты BC и AC имеют соответственно длины a и b.



Дано: AC=b, BC=a, ABDE- квадрат, <C=90°;

Найти: CQ

Решение:

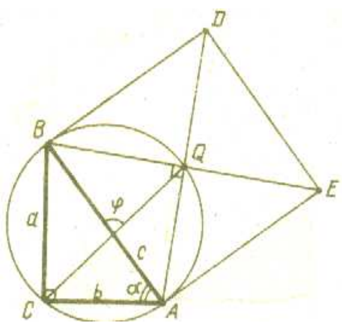
Сумма площадей треугольников ABC и ABQ равна площади четырехугольника AQBC:

$\frac{1}{2}ab + \frac{1}{2}AQ^2 = c \cdot CQ \sin\varphi$, где φ – величина угла между прямыми AB и CQ. Луч CQ есть биссектриса угла ACB, так как вписанные углы ACQ и BCQ опираются на равные дуги AQ и BQ. По теореме о внешнем угле треугольника $\varphi = \alpha + 45°$. Подставив в предыдущее равенство $AQ^2 = \frac{1}{2}(a^2 + b^2)$ и

$\sin\varphi = \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{a+b}{c}$ (по теореме синусов),получим: $ab + \frac{1}{2}(a^2 + b^2) = CQ \cdot \frac{\sqrt{2}}{2}(a+b)$ и

$CQ = \dfrac{a+b}{\sqrt{2}}$. *Ответ:* $\dfrac{a+b}{\sqrt{2}}$.

3) метод координат



З а д а ч а : На гипотенузе AB прямоугольного треугольника ABC построен квадрат ABDE в той полуплоскости от прямой AB, которой не принадлежит треугольник ABC. Найти расстояние от вершины C прямого угла до центра квадрата, если катеты BC и AC имеют соответственно длины a и b.

Дано: AC=b, BC=a, ABDE- квадрат, < C=90°;

Найти: CQ

Решение:

Примем прямые CA и CB за оси Ox и Oy прямоугольной декартовой системы координат. Найдем координаты x, y точки Q. Она принадлежит биссектрисе угла ACB (по решению 4) и равноудалена от точек A(b,0) и B(0,a).

Имеем систему: $\{ x = y,$
$\{(x - b)^2 + y^2 = x^2 + (y - a)^2,$

откуда $2x(b - a) = b^2 - a^2$ (подставив первое равенство во второе). Если $a \neq b$, то имеем решение $x = y = \dfrac{a+b}{\sqrt{2}}$. При a = b четырехугольник AQBC является квадратом и x = y

=a, т.е. координаты точки Q удовлетворяют прежнему решению. По формуле расстояния между двумя точками

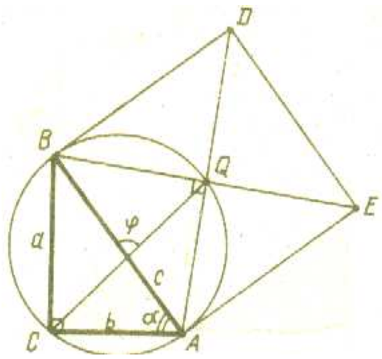
(Формула расстояния между двумя точками: пусть A и B -- две точки плоскости, с координатами: $(x_1;y_1)$ и $(x_2;y_2)$ соответственно, тогда $AB = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$.

): CQ = $\sqrt{x^2 + y^2}$ = $\sqrt{\frac{(a+b)^2}{2}}$ = $\frac{a+b}{\sqrt{2}}$. *Ответ:* $\frac{a+b}{\sqrt{2}}$.

Выводы по методу координат: метод координат является самым универсальным методом геометрии.

4) векторный метод.

З а д а ч а: На гипотенузе AB прямоугольного треугольника ABC построен квадрат ABDE в той полуплоскости от прямой AB, которой не принадлежит треугольник ABC. Найти расстояние от вершины C прямого угла до центра квадрата, если катеты BC и AC имеют соответственно длины a и b. [3]



Дано: AC=b, BC=a, ABDE- квадрат, <C=90°;

Найти: CQ

Решение:

Положим $\overrightarrow{AC}$ = b и $\overrightarrow{CB}$ = a и выразим через эти векторы вектор $\overrightarrow{CQ}$: $\overrightarrow{CQ} = \overrightarrow{CA} + \overrightarrow{AQ} = \vec{b} + \frac{1}{2}(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AE}) = \vec{b} + \frac{1}{2}(\vec{a} - \vec{b}) + \frac{1}{2}\overrightarrow{AE} = = \frac{1}{2}(\vec{a} + \vec{b}) + \frac{1}{2}\overrightarrow{AE}$, положив $\overrightarrow{AE}$ = αa + βb, найдем коэффициенты α и β этого разложения, используя условия $\overrightarrow{AE} * \overrightarrow{AB} = 0$ и $|\overrightarrow{AE}| = |\overrightarrow{AB}|$, которые приводят к системе уравнений:

$\{(\alpha\vec{a} + \beta\vec{b})(\vec{a} - \vec{b}) = 0,$

$\{(\alpha\vec{a} + \beta\vec{b})^2 = (\vec{a} - \vec{b})^2.$

Выполнив действия, получим: $\{\alpha\vec{a}^2 + \alpha\overrightarrow{ab} + \beta\overrightarrow{ab} + \beta\vec{b}^2 = 0$

$\{\alpha^2 a^2 + 2\alpha\beta\overrightarrow{ab} + \beta^2 b^2 = \vec{a}^2 - 2\overrightarrow{ab} + \vec{b}^2,$

Поскольку $\overrightarrow{ab} = 0$, то: $\{\alpha\vec{a}^2 - \beta\vec{b}^2 = 0,$

$\{\alpha^2 a^2 + \beta^2 b^2 = \vec{a}^2 + \vec{b}^2,$

откуда $\alpha = \frac{b}{a}$ и $\beta = \frac{a}{b}$, следовательно, $\overrightarrow{AE} = \frac{b}{a}\vec{a} + \frac{a}{b}\vec{b}$, $\overrightarrow{CQ} = \frac{1}{2}(\vec{a} + \vec{b}) + \frac{1}{2}(\frac{b}{a}\vec{a} + \frac{a}{b}\vec{b}) = \frac{1}{2}(\frac{a+b}{a}\vec{a} + \frac{a+b}{b}\vec{b})$.Наконец, $CQ^2 = \frac{1}{2}(a+b)^2$, CQ = $\frac{a+b}{\sqrt{2}}$.*Ответ:* $\frac{a+b}{\sqrt{2}}$.

В процессе работы я сделал для себя **важные выводы**:

- во-первых, решая задачу разными способами, снимается психологический барьер перед поиском решения задачи. Ведь если знаешь, что задача имеет несколько способов решения, то смелее берешься за неё. Постепенно, решая задачу за задачей, приобретаешь некоторый опыт, что позволит развить математическое чутье;
- во-вторых, подробный разбор способов решения задач является хорошим подспорьем для того, чтобы освежить в памяти пройденный материал;

- в-третьих, при такой работе над задачей формируется логическое мышление, развивается интуиция, систематизируются знания, расширяется общеобразовательный кругозор;
- в-четвертых, овладевая основными методами решения задач, составляющими важную часть многих эвристических алгоритмов, можно рационально планировать поиск решения задачи, выполнять полезные преобразования условия задачи, а также использовать известные приемы познавательной деятельности – наблюдение, сравнение, обобщение.

В процессе работы я понял, что для того, чтобы быть успешным и находить различные способы решения задач, необходимы следующие **принципы**:

1) принцип регулярности: основная работа проходит не в классе, а дома, индивидуально. При этом лучше заниматься понемногу, но часто;

2) принцип параллельности: следует постоянно держать в поле зрения несколько тем, постепенно продвигаясь по ним вперед и вглубь;

3) принцип опережающей сложности: не следует загружать ученика сложной работой, большой по объему, а так же задавать непосильные задачи. Слишком легко и слишком трудно – эквивалентно плохо.

*4) принцип вариативности: о*чень полезно на примере одной задачи рассмотреть различные приемы и методы решения, а затем сравнить получившиеся решения с различных точек зрения: стандартность и оригинальность, обьем вычислительной и объяснительной работы, эстетическая и практическая ценности;

6) принцип самоконтроля: регулярный и систематический анализ своих ошибок и неудач должен быть непременным элементом самостоятельной работы;

7) принцип быстрого повторения: по мере накопления числа решенных задач следует просматривать образовавшийся задачный архив;

*8) принцип работы с текстом: у*чебник должны читать и изучать, порою с карандашом и бумагой.

Все перечисленное создает условия для формирования навыков исследовательской деятельности, способствующей накоплению творческого потенциала. Более того, решение подобных задач помогает развивать себя, наше логическое, математическое и творческое мышление, делать упор на самостоятельность и в конечном итоге добиваться профессионализма, который необходим нам для последующей работы.

В своей работе я рассмотрел различные способы решения геометрических задач, используя известные методы. Бесспорно, изучение методов решения геометрических задач будет более эффективным, если рассматривать их на примере одной задачи.

Решая одну и ту же задачу различными методами, можно лучше понять специфику того или иного метода, его преимущества и недостатки в зависимости от содержания задачи. Решение задач несколькими способами помогает установить связи между, казалось бы, совершенно разнородными темами школьного курса математики.

Из всех представленных решений легко найти наиболее рациональные, но суждения о простоте или сложности того или иного решения задачи в значительной мере субъективно. Оно существенно зависит от подготовленности, от уровня владения методами решения задач.

Считаю, что ***цель работы*** – выявление оригинальных, рациональных, стандартных методов решения геометрических задач, достигнута.

Выдвинутая нами ***гипотеза*** подтверждена, ведь каждый метод в зависимости от условия задачи может быть и оригинальным, и стандартным, объемным с вычислительной и объяснительной работы, может представлять эстетическую и практическую ценности.