УДК 51

# МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ПРИКЛАДНЫХ ЗАДАЧ НА ЭКСТРЕМУМ

**Шпорт Н.П.,**
**научный руководитель преподаватель математики Меньших Л.Л.**
***Муниципальное бюджетное общеобразовательное учреждение "Лицей №174"***

Математическое моделирование является одним из методом изучения недоступных нам непосредственно явлений макро- и микромира. В процессе развития науки и техники данные об изучаемых явлениях всё более и более уточняются, и наступает момент, когда выводы, получаемые на основе существующей модели, не соответствуют объективной реальности, и именно тогда возникает необходимость в построении математической модели. Именно математическое моделирование позволяет реализовать практическую (прикладную) направленность школьной математики, что очень ***актуально*** в наши дни.

Таким образом, ***объектом исследования*** в данной работе являются математические модели прикладных задач на экстремум. ***Предмет исследования***-решение математических моделей прикладных задач на экстремум различными способами. ***Гипотеза***: решение математической модели с применением производной является общим методом решения прикладных задач на экстремум.

***Цель работы***: освоение метода математического моделирования и различных приёмов решения математической модели прикладных задач на экстремум.

***Задачи:***

1. Рассмотреть основные понятия: *модель, моделирование, математическая модель*, *математическое моделирование.*
2. Изучить трехэтапную схему математического моделирования, некоторые особенности реализации каждого из этапов.
3. Рассмотреть частные приёмы решения математической модели.
4. Рассмотреть применение производной к решению математической модели прикладных задач на экстремум.
5. Разработать план решения текстовых задач на экстремум.
6. Проанализировать и сравнить различные способы решения прикладных задач на экстремум.

**Методы исследования**:

1. информационный (анализ справочников, энциклопедий, ресурсов Интернет);
2. анализ, синтез, обобщение;
3. моделирование;
4. метод самостоятельного исследования.

С незапамятных времён перед человеком возникают практические проблемы нахождения наибольшего и наименьшего, наилучшего и наихудшего. Как правило, в задачах подобного рода достижение некоторого результата может быть осуществлено не единственным способом и приходится отыскивать наилучший способ достижения результата.

Задачи такого характера, получившие название *экстремальных задач*, возникают в самых различных областях человеческой деятельности. Содержание экстремальных задач самое разнообразное, разнообразны и методы их решения. Однако общее в решении таких задач заключается в самом характере применения того или иного математического метода. По самой своей природе математические методы не могут прилагаться непосредственно к действительности, а применяются только к *математическим моделям* того или иного явления. Что же такое математическая модель?

В прикладных задачах непосредственно задаётся реальный «нематематический» объект. Исследование начинается с формализации объекта, с построения математической модели.

*Модель - отражение наиболее существенных свойств, признаков и отношений явлений, объектов или процессов предметного мира.*

*Математическая модель* - система математических соотношений, описывающих изучаемый процесс или явление.

*Математическое моделирование* - процесс построения математической модели объекта и последующего изучения данного объекта.

**Трёхэтапная схема математического моделирования**

Процесс математического моделирования можно представить в виде следующих этапов:

1. *Построение математической модели* (переформулировка задачи в математических терминах). Данный этап можно разбить на следующие подэтапы: анализ условия задачи (составление краткой записи в виде схемы, таблицы, чертежа и т.д.);

1.1. Выбор и обозначение неизвестной;

1.2. Выражение зависимостей задачи с помощью введенного обозначения;

1.3. Определение области допустимых значений величин; получение математической модели.

2. *Решение* математической модели *математическими методами*.

3. *Анализ полученного результата*.В ходе этого этапа, возможно, потребуется пересмотр самого подхода к постановке и решению задачи и возврат к первому этапу. Это может произойти в том случае, если полученные результаты не отражают свойства объекта или явления, сформулированные в постановке задачи.

**Частные приёмы решения задач на экстремум**

**Выделение полного квадрата из квадратного трёхчлена**

*З а д а ч а 1. Заготовлен материал для изгороди длиной l м. Необходимо этой изгородью огородить прямоугольную площадку, имеющую наибольшую площадь. Какими должны быть размеры этой площадки?*

*Р е ш е н и е.* Пусть ширина прямоугольника x м. Тогда длина его должна быть равна $\frac{l}{2}-$ x, площадь S = $\left(\frac{l}{2}-x\right)x$. Остаётся найти при каком значении $x$ функция S=$\left(\frac{l}{2}-x\right)x$ принимает наибольшее значение. Преобразуем функцию, выделив из неё полный квадрат:

$$\left(\frac{l}{2}-x\right)x=-x^2+\frac{l}{2}x=-\left(x^2-\frac{l}{2}x\right)=-\left(x^2-2x\frac{l}{4}+\frac{l^2}{16}\right)-\frac{l^2}{16}\Bigg)=-\left(\left(x-\frac{l}{4}\right)^2-\frac{l^2}{16}\right)=\frac{l^2}{16}-\left(x-\frac{l}{4}\right)^2$$

Получившаяся разность будет наибольшей при наименьшем значении вычитаемого, которое равно 0 при $x-\frac{l}{4}=0$. Следовательно, рассматриваемая функция принимает наибольшее значение при $x=\frac{l}{4}$. *О т в е т.* Площадка с периметром $l$ будет иметь наибольшую площадь, если ширина ее равна $\frac{l}{4}$ и длина $\frac{l}{4}$, то есть когда она будет *квадратной.*

Мы доказали ***теорему***: *Из всех прямоугольников с данным периметром наибольшую площадь имеет квадрат.*

При решении задач на нахождение экстремумов квадратичных функций пользуются следующей ***теоремой:***

*Квадратичная функция* $y = ax^2 + bx + c$ *принимает экстремальное значение при* $x_o = -\frac{b}{2a}$. *Это значение будет наибольшим (максимумом), если* $a<0$, *и наименьшим(минимумом), если* $a > 0$. *И в том и другом случае экстремальное значение функции будет равно* $c - \frac{b^2}{4a}$.

Выведем из теоремы об экстремуме квадратичной функции полезное ***следствие***: *Произведение двух положительных множителей, сумма которых постоянна, достигает наибольшего значения тогда, когда эти множители равны .*

**Неравенство Коши**

Многие задачи на экстремумы решаются с помощью одного *замечательного неравенства*. Это неравенство связывает среднее арифметическое и среднее геометрическое чисел.

***Теорема:*** *Пусть* $x_1, x_2, x_3, \dots x_n$ — *неотрицательные числа и* $n$ *- натуральное число. Тогда* $\frac{x_1 + x_2 + x_3 + \dots + x_n}{n} \geq \sqrt[n]{x_1 x_2 x_3 \dots x_n}$ . *Здесь равенство имеет место в том и только в том случае, если* $x_1 = x_2 = x_3 = \dots = x_n$.

*З а д а ч а 2. Найдите наименьшее значение функции* $y = 5x + \frac{2}{x}$ *при положительных значениях аргумента.*

*Р е ш е н и е.* В силу неравенства между средним арифметическим и средним геометрическим двух чисел $5x + \frac{2}{x} \geq 2\sqrt{5x \cdot \frac{2}{x}}$. Тогда $5x + \frac{2}{x} = 2\sqrt{10}$ . Равенство достигается при $5x = \frac{2}{x}$, откуда для положительных x: $x = \sqrt{0{,}4}$ , и наименьшее значение функции равно $2\sqrt{10}$ .*О т в е т.* Наименьшее значение функции $y = 5x + \frac{2}{x}$ равно $2\sqrt{10}$ .

**Геометрическое решение**

*З а д а ч а 3. Из всех прямоугольников вписанных в полукруг, найдите прямоугольник наибольшей площади.*

*Р е ш е н и е.* Пусть ABCD - прямоугольник, вписанный в полуокружность, KP- её диаметр (рис. 1). Объединение данной полуокружности и её образа при осевой симметрии относительно (KP) - окружность. В эту окружность вписан прямоугольник AA'B'B; A'B' = S(KP)AB (рис. 2). Площадь прямоугольника ABCD-половина площади прямоугольника AA'B'B. Отсюда следует, что площадь прямоугольника ABCD максимальна следовательно, и площадь прямоугольника AA'B'B тоже максимальна. *Но из всех прямоугольников, вписанных в окружность, наибольшую площадь имеет квадрат.*

*О т в е т.* Искомый прямоугольник имеет отношение сторон 2 : 1, а его площадь равна $R^2$, где R- радиус данной полуокружности. Почти для каждой задачи на экстремум приходилось «изобретать» подходящий для нее прием. Возникает вопрос: а нет ли общего приема решения задач на экстремумы? Такой прием есть. Его дает нам *математический анализ*.

**Основной метод решения задач на нахождение экстремумов**

Общий прием решения задач на экстремум опирается на ***т е о р е м у Ферма***:

*Если функция y=f(x) (имеющая производную) при x = $x_0$, принимает максимум или минимум, то производная от этой функции при x = $x_0$ обращается в 0*

**Применение производной к решению задач на экстремумы**

*З а д а ч а 1. Корабль находится от точки А берега на расстоянии 3 км. С корабля отправлен гонец с донесением в штаб В, находящийся от точки А на расстоянии 10 км по берегу (∠BAK=90). Лодка движется со скоростью 4 км/ч, а гонец выйдя из лодки, может пройти 5 км (рис. 3). К какому пункту берега должна пристать лодка, чтобы донесение в штаб было доставлено в кратчайшее время?*

*Р е ш е н и е:*

1) Постоянными величинами будут |АК|=3 км, |АВ|=10 км, υ лодки =4км/ч, υ гонца =5км/ч. Переменными величинами будут расстояния |АМ |,|КМ |,|ВМ |. Исследуемая величина – время, затраченное на их прохождение.

2) Обозначим через *x* расстояние АМ. Тогда по определению

$0 \le x \le 10$.

3) Выразим время, затраченное на путь КМВ, через *x*. Из прямоугольного треугольника АКМ, по теореме Пифагора имеем $|KM| = \sqrt{x^2+9}$. Время затраченное на путь КМВ, будет $t(x) = \dfrac{\sqrt{9+x^2}}{4} + \dfrac{10-x}{5}$

4) Найдём критические точки функции *t* на [0;10]:

$t'(x) = \dfrac{x}{4\sqrt{9+x^2}} - \dfrac{1}{5} = \dfrac{5x - 4\sqrt{9+x^2}}{20\sqrt{9+x^2}}$. Производная всюду существует, так как знаменатель дроби не обращается в нуль ни при каких значениях *x*. Следовательно, критическими точками могут быть те, в которых производная равна нулю.

$\dfrac{5x-4\sqrt{9+x^2}}{20\sqrt{9+x^2}} = 0$; $5x - 4\sqrt{9+x^2} = 0$; $4\sqrt{9+x^2} = 5x$; $16(9+x^2) = 25x^2$; $x^2 = 16$; $x = 4$ или $x = -4$. Точку $x$ =-4 не принадлежит промежутку [0;10].

5)Найдём значения функции в точке *x* = 4 и на концах отрезка *x* = 0 и *x* = 10.

6)Так как $t(0) = 2{,}75$, $t(4) \approx 1{,}9$, $t(10) \approx 1{,}5$, то наименьшее значение функция *t* достигает в точке *x*=4.

*О т в е т.* Донесение будет доставлено в штаб в кратчайший промежуток времени, если лодка пристанет к берегу в месте, отстоящем от точки А на расстоянии, равном 4 км.

**Выводы**: если имеется достаточно общий метод решения задач, приводящий к нахождению экстремумов функции одной переменной величины, то зачем было рассматривать частные приёмы? На поставленный вопрос можно ответить словами большого мастера Якоба Штейнера. Он говорил о двух методах решения таких задач: о синтетическом (с помощью частных приёмов) и с помощью дифференциального исчисления (использование производной). Надо знать и пользоваться как распространёнными частными приёмами, так и общими. Все задачи очень индивидуальны. Для одних из них применение общего метода может оказаться громоздким, в то время как частными приёмами эти задачи могут быть решены удивительно просто и красиво. Для других, наоборот, общий приём может оказаться очень удобным.

Нужно искать и разрабатывать с большей настойчивостью общие методы. Считаю, что цель работы достигнута.