УДК 531.8

ОПИСАНИЕ ГИДРАВЛИЧЕСКОЙ СИСТЕМЫ НЕЛИНЕЙНЫМИ УРАВНЕНИЯМИ.

Тюкпеев М. Н.,
научный руководитель канд. техн. наук Никитин А. А.
Политехнический институт

Уравнения, описывающие изменяющиеся во времени состояния систем или элемента, называются уравнениями динамики.

Однако уравнения динамики реальных элементов и систем вследствие сложности протекающих в них физических процессов обычно получаются нелинейными.

При исследовании процессов, протекающих в системах, с помощью нелинейных математических моделей часто приходится применять ЭВМ и пакеты прикладных программ, основанные на численных методах.

В качестве примера приведем описание простой гидравлической системы, схема которой показана на рисунке 1. Система состоит из распределителя 1 с постоянным гидравлическим сопротивлением, регулируемого дросселя 2 с переменным гидравлическим сопротивлением, гидроцилиндра 3 с поршнем 4 и массы m. Сопротивлением гидролиний будем пренебрегать. В этом случае давление после распределителя 1, перед регулируемым дросселем и в гидроцилиндре будет одинаковым (p_2). На поршень с одной стороны действует сила давления жидкости, а с другой – сила пружины 5, жёсткость которой равна $c_{пр}$. Поршень находится в равновесии, когда эти силы равны. Изменяя гидравлическое сопротивление регулируемого дросселя, можно изменять давление p_2. Это приводит к нарушению равновесия сил, действующих на поршень, и к его перемещению.

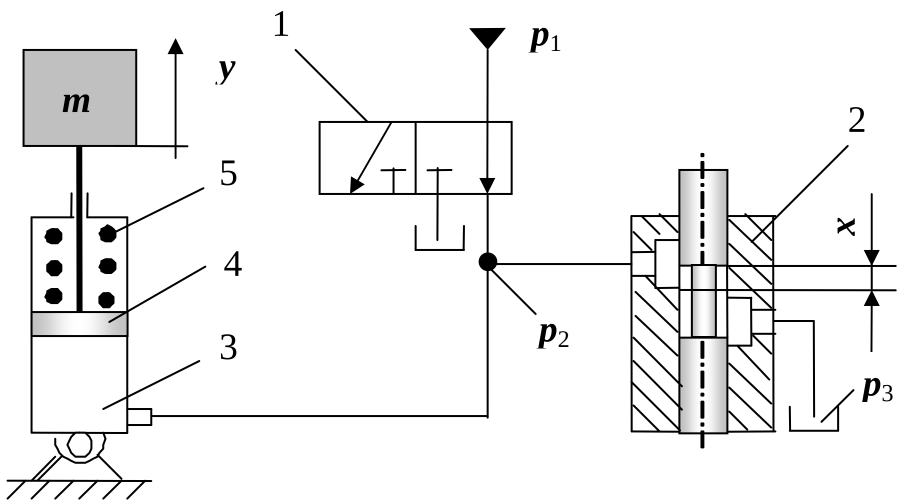

Рис. 1. Гидравлическая система

Масса m с помощью штока жёстко связана с поршнем, поэтому при перемещении поршня будет перемещаться и масса m.

Гидравлическое сопротивление регулируемого дросселя можно изменять за счёт изменения его проходного сечения. Таким образом, изменяя проходное сечение регулируемого дросселя 2, перемещением x золотника можно управлять положением y массы m.

Будем считать давление p_1 перед распределителем и давление p_3 после дросселя постоянными, причём $p_1 > p_3$.

При показанных на схеме направлениях течения жидкости с расходами Q_1, Q_2 и Q_3 можно записать:

$$Q_1 = Q_2 + Q_3\,, \tag{1}$$

$$Q_1 = \mu_1 \cdot f_1 \cdot \sqrt{\frac{2 \cdot (p_1 - p_2)}{\rho}}\,, \tag{2}$$

$$Q_2 = \mu_2 \cdot \pi \cdot d \cdot k \cdot x \cdot \sqrt{\frac{2 \cdot (p_2 - p_3)}{\rho}}\,, \tag{3}$$

где μ_1 - коэффициент расхода распределителя; f_1 - площадь поперечного сечения канала нерегулируемого дросселя; μ_2 - коэффициент расхода регулируемого дросселя; d - диаметр регулируемого канала; k - коэффициент, зависящий от конструктивного исполнения устройства. Коэффициенты μ_1 и μ_2 будем считать постоянными.

На основании неразрывности течения, с учётом сжимаемости жидкости в гидроцилиндре можно записать:

$$Q_3 = S \cdot \frac{dy}{dt} + \frac{W_0}{E_{Ж}} \cdot \frac{dp_2}{dt}\,, \tag{4}$$

где S - площадь поршня; y - перемещение поршня (массы m); W_0 - объём рабочей полости гидроцилиндра, соответствующий установившемуся режиму; $E_{Ж}$ - модуль объёмной упругости жидкости.

Уравнение движения поршня можно записать в виде:

$$p_2 \cdot S - F_{ПР} - F_{ТР} = m \cdot \frac{d^2y}{dt^2}\,, \tag{5}$$

где $F_{ПР}$ - сила, приложенная к поршню со стороны пружины; $F_{ТР}$ - сила трения между поршнем и цилиндром.

При линейной характеристике пружины:

$$F_{ПР} = F_{ПР.0} + c_{ПР} \cdot y\,, \tag{6}$$

где $F_{ПР.0}$ - сила, развиваемая пружиной при равновесии поршня в положении $y = 0$.

Если силой трения между поршнем и цилиндром пренебречь, то с учётом соотношения (6) уравнение (5) примет вид:

$$p_2 \cdot S - (F_{ПР.0} + c_{ПР} \cdot y\,) = m \cdot \frac{d^2y}{dt^2}\,, \tag{7}$$

Система уравнений (1) – (4) и (7) представляет собой нелинейную математическую модель рассматриваемой гидравлической системы, потому что содержит нелинейные функции (2) и (3).

В этом случае математическое описание удобнее выполнять в переменных состояния и системы уравнений приводить к дифференциальным уравнениям первого порядка, записанным в форме Коши.

Для примера выполним математическое описание процессов, протекающих в гидравлической системе (рисунок 1) в переменных состояния.

Введём обозначение:

$$v = \frac{dy}{dt}\,, \tag{8}$$

где v - скорость поршня и массы m, так как y - перемещение поршня.

С учётом формулы (8) система уравнений (1) – (4) и (7) примет вид:

$$\begin{cases} v = \dfrac{dy}{dt} \\ p_2 \cdot S - (F_{\text{ПР.0}} + c_{\text{ПР}} \cdot y\,) = m \cdot \dfrac{dv}{dt} \\ Q_1 = Q_2 + Q_3 \\ Q_1 = \mu_1 \cdot f_1 \cdot \sqrt{\dfrac{2 \cdot (p_1 - p_2)}{\rho}} \\ Q_2 = \mu_2 \cdot \pi \cdot d \cdot k \cdot x \cdot \sqrt{\dfrac{2 \cdot (p_2 - p_3)}{\rho}} \\ Q_3 = S \cdot v + \dfrac{W_0}{E_{\text{Ж}}} \cdot \dfrac{dp_2}{dt} \end{cases} \tag{9}$$

В качестве переменных состояний примем y, p_2 и v. Подставим в третье уравнение системы (9) выражения для расходов Q_1, Q_2 и Q_3 из четвёртого, пятого и шестого уравнений, затем члены, содержащие производные от переменных состояний, перенесём в левые части уравнений, в результате получим систему дифференциальных уравнений первого порядка в форме Коши:

$$\begin{cases} \dfrac{dy}{dt} = v \\ \dfrac{dv}{dt} = \dfrac{1}{m} \cdot [p_2 \cdot S - (F_{\text{ПР.0}} + c_{\text{ПР}} \cdot y\,)] \\ \dfrac{dp_2}{dt} = \dfrac{E_{\text{Ж}}}{W_0}\left[\mu_1 f_1 \sqrt{\dfrac{2(p_1 - p_2)}{\rho}} - \mu_2 \pi d k x \sqrt{\dfrac{2(p_2 - p_3)}{\rho}} - S v\right] \end{cases} \tag{10}$$

При заданных начальных условиях, т.е. при заданных значениях переменных состояний в начальный момент времени t_0:

$$y(t_0) = y_0\,, \tag{11}$$

$$v(t_0) = v_0\,, \tag{12}$$

$$p_2(t_0) = p_{2.0} \tag{13}$$

и известном входном воздействии – перемещении золотника x для все $t > t_0$, т.е.

$$x = x(t) \tag{14}$$

можно найти зависимости $y(t)$, $\upsilon(t)$ и $p_2(t)$ для всех $t > t_0$.

Результаты численных расчётов математической модели (10) в MathCAD приведены на рис.2 – 4.

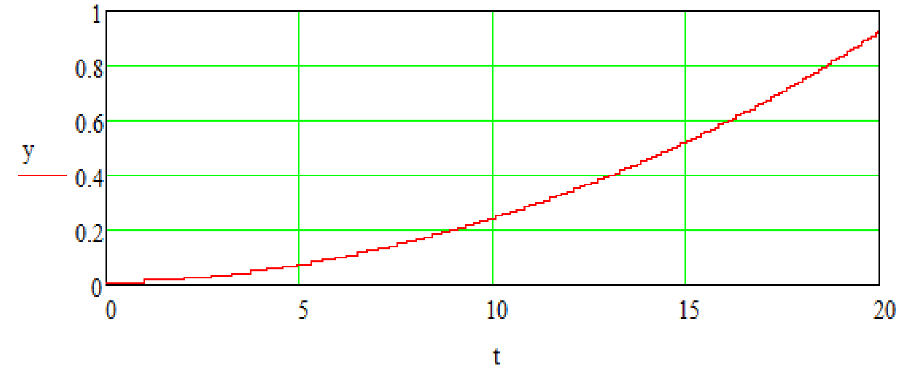

Рис. 2. Зависимость перемещения поршня от времени

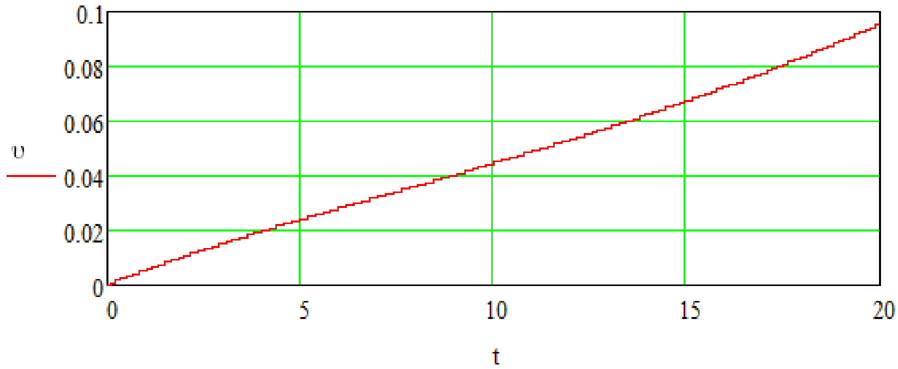

Рис. 3. Зависимость скорости поршня от времени

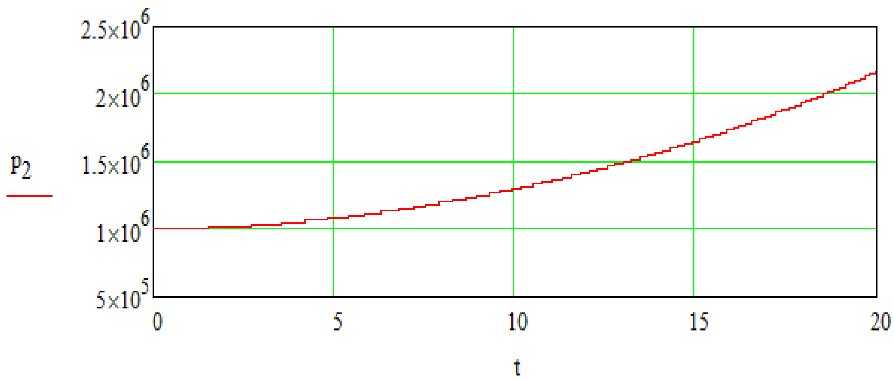

Рис. 4. Зависимость давления в полости гидроцилиндра от времени

Выводы: Полученная математическая модель гидросистемы и алгоритм её расчёта позволяют исследовать процессы, протекающие в гидросистеме, получить зависимости от времени параметров, характеризующих состояние гидросистемы.