УДК 66.021.1

МАТЕМАТИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ ТЕЧЕНИЯ РАБОЧЕЙ СМЕСИ В ЩЕЛЯХ РОТОРА И СТАТОРА МНОГОСТУПЕНЧАТОГО ГИДРОУДАРНО-КАВИТАЦИОННОГО УСТРОЙСТВА

Мещеряков И.В.,
научный руководитель д-р техн. наук, проф. Анушенков А.Н.
Сибирский федеральный университет

Для установления оптимальных режимов работы многоступенчатого гидроударно-кавитационного устройства представлена модель течения рабочей смеси в щелях ротора и статора с учетом центробежных сил и силы Кориолиса. Рассматриваемые силы инерции оказывают существенное влияние на процесс течения жидкости в устройстве. В свою очередь, качественный процесс течения определяет оптимальные процессы приготовления рабочих смесей и мелкодисперсного измельчения до наноразмерности частиц для вскрытия зёрен полезного ископаемого твёрдых материалов.

Рассмотрим процесстечения смеси в щелях ротора и статора устройства. Процесс течения смеси в паре соседних щелей ротора и статора схематично представлен на рисунке 1.

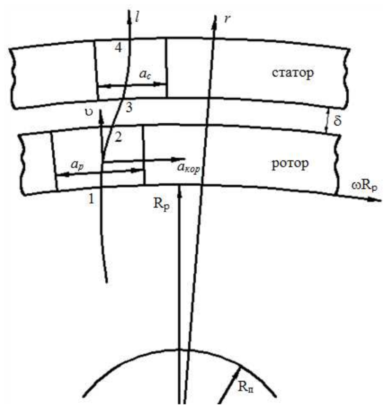

Рисунок 1 – Процесс течения жидкости в рабочей парещелей ротора и статора

Разделим процесс течения на несколько стадий. На первой стадии исследуем процесс течения в щели ротора. Уравнение относительного движения частиц среды во вращающейсящели ротора запишется следующим образом:

$$m\frac{dv}{dt} = f(\Delta P_{\Sigma}) - ma_{\text{пер}} - ma_{\text{кор}} \qquad (1)$$

где: m– масса частицы среды;υ– скорость частицы; $f(\Delta P_{\Sigma})$– сила, обусловленная давлением, создаваемым как внешним источником (при дополнительной установке насоса), так и центробежными силами инерции; $a_{пер}$– переносное ускорение, обусловленное переносом системы отчета (щель ротора) относительно неподвижной системы отсчета (щель статора), переносное движение является вращательным движением;$a_{кор}$– ускорение Кориолиса, равное векторному произведению двух векторов – угловой скорости ω и относительной скорости движения частиц среды по щели статораυ.

Ускорение Кориолиса определится по следующему выражению$a_{\text{кор}} = 2(\omega v)$.Последние два слагаемых в уравнении (1) является силами инерции, поэтому они отрицательны.Поскольку переносное движение частиц среды щели ротора представляет собой вращение вокруг неподвижной оси (рисунок 1), то сила инерции в переносном движении является суммой нормальной $F_{пер,n}$ и касательной $F_{пер,\tau}$ сил инерции:

$F_{пер} = F_{пер,n} + F_{пер,\tau}$

где: $F_{пер,n}$= -$ma_{пер,n}$;$F_{пер,\tau}$= - $ma_{пер,\tau}$.

По модулю силы инерции равны соответственно:

$F_{пер,n} = mr\omega^2$;$F_{пер,\tau}$= $mr\varepsilon$

где: r– радиальная координата; ω– угловая скорость ротора (щели ротора); ε– угловое ускорение подвижной системы отсчета (щели ротора). Так как в технологической практике чаще всего реализуется ситуация, когда угловая скорость ротора постоянная, то угловое ускорение ε равно нулю:$\varepsilon = \frac{d\omega}{dt} = 0$.

По этой причине касательная сила инерции равна нулю. Оставшийся компонент - нормальная сила инерции – направлена вдоль главной нормали от центра кривизны ротора, поэтому ориентацию векторов сил можно представить в виде, показанном на рисунке 2, а уравнение (1) преобразовать следующим образом:

$$f(\Delta P_\Sigma) = m\frac{dv}{dt} - F_{пер} - F_{кор}$$

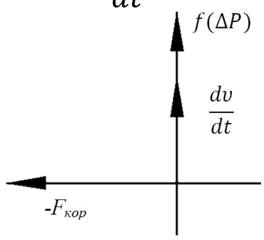

Рисунок 2–Осевая ориентация векторов сил

С учетом вышеприведенного уравнения и рисунка 2 для единицы массы среды уравнение (1) можно записать в скалярном виде:

$$\frac{1}{\rho}\lambda\frac{\Delta P_\Sigma}{l_p} = \left[\left(\frac{dv}{dt} - \omega^2 r\right)^2 + (2\omega v)^2\right]^{0,5} \qquad (2)$$

На жидкость в щели ротора действует перепад давления, составляющий в первом приближении долю от полного перепада давления ΔP_Σ, равную λ:

$$\lambda = \frac{l_p}{l_p + l_c + \delta}$$

Тогда уравнение (2) примет следующий вид:

$$\frac{\Delta P_\Sigma}{l_p + l_c + \delta} = \rho\left[\left(\frac{dv}{dt} - \omega^2 r\right)^2 + (2\omega v)^2\right]^{0,5} \qquad (3)$$

Учитывая, что$r = \int_0^t v_p(t)dt$, а также то, что необходимо учесть потери напора на трение в щели ротора, так как речь идет о течении в щели ротора, начто указывает индекс «р» в интеграле от скорости, запишем выражение:

$$\frac{\Delta P_\Sigma}{l_p + l_c + \delta} = \rho\left[\left(\frac{dv_p}{dt} - \omega^2\int_0^t v_p(t)dt\right)^2 + (2\omega v_p)^2\right]^{0,5} + \zeta_{тр}\frac{\rho v_p^2}{2l_p} \qquad (4)$$

Уравнение (4) справедливо для течения в щели ротора, причем расход Q и площадь поперечного сечения щели ротора S_p, а также коэффициентытрения и местного сопротивления связаны соотношениями$v_p = \frac{Q}{S_p}$ и $\zeta_{тр} < \zeta_{мест.\ сопр.}$

Жидкость в щели статора движется только поступательно, а вращательное движение совершается только в зазоре, и доля жидкости, совершающей вращательное движение, составляет долю δ/l_c< 1. По этой причине нет необходимости учитывать силы инерции, но появляется необходимость учитывать потери ζ(t) в местных сопротивлениях, связанных с сужением, поворотами и расширениями потока. И, кроме того, необходимо учесть дополнительное давление, создаваемое центробежными силами инерции в зазоре между ротором и статором (рисунок 3).

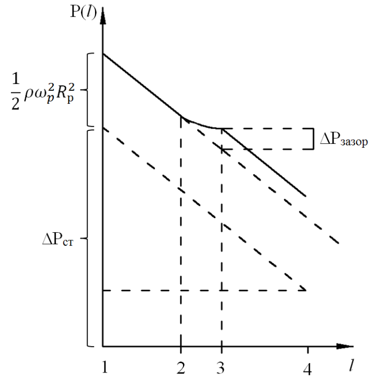

Рисунок 3 – График распределения давления вдоль дуговой координаты lпри H_0< 1

Таким образом, уравнение движения жидкости в зазоре и щели статора примет следующий вид:

$$\frac{l_c+\delta}{l_p+l_c+\delta} = \frac{\Delta P_\Sigma}{l_c+\delta} + \frac{\Delta P_{\text{зазор}}}{l_c+\delta} = \rho\frac{dv_c}{dt} + \frac{\rho v_c^2}{2(l_c+\delta)}\zeta(t) \quad (5)$$

Величиной, связывающей уравнения (4) и (5), является сохраняющийся расход$Q=\upsilon_c S_c=\upsilon_p S_p$. Переходя к величине расхода, и сложив уравнения (4) и (5),получим:

$$\frac{2\Delta P_\Sigma}{l_p+l_c+\delta} + \frac{\Delta P_{\text{зазор}}}{l_c+\delta} = \rho\left[\frac{1}{S_p}\left[\left(\frac{dQ}{dt} - \omega^2\int_0^t Q(t)dt\right)^2 + (2\omega Q)^2\right]^{0,5} + \frac{1}{S_c}\left[\frac{dQ}{dt} + \frac{1}{S_c}\frac{Q^2}{2(l_c+\delta)}\zeta(t)\right]\right] \quad (6)$$

Уравнение (6) является нелинейным интегрально-дифференциальным уравнением, неразрешимым в квадратурах. В связи с этим необходимо провести возможные упрощения этого уравнения. Известно, что большую часть времени 0 <t< T функция Q(t) может (при высокой степени нестационарности H_0<1) рассматриваться как линейная:

$$Q(t) = S_p\frac{\Delta P}{\rho l_p}t = S_c\frac{\Delta P}{\rho l_0}t$$

Интеграл$\int_0^t Q(t)dt$ определится:

$$\int_0^t Q(t)dt = \int_0^t S_p\frac{\Delta P}{\rho l_p}tdt = S_p\frac{\Delta P}{\rho l_p}t^2 = Q(t)\frac{t}{2}$$

После тождественных преобразований получим:

$$\frac{\Delta P_\Sigma}{l} + \frac{\Delta P_{\text{зазор}}}{l} = \frac{\rho}{S_0}\left[\left[1 + \frac{2\omega^2 Q^2}{\left(\frac{dQ}{dt}\right)^2}\right]\frac{dQ}{dt} + \frac{dQ}{dt} + \frac{Q^2}{2S_0\left(\frac{l}{2}\right)}\zeta(t)\right] \quad (7)$$

Вернемся к среднерасходной скорости $\upsilon=Q/S_o$, тогда уравнение (7)преобразуется следующим образом:

$$\Delta P = \rho l\frac{d\upsilon}{dt} + \left[\frac{d\upsilon}{dt}\right]^{-1}\omega^2\upsilon^2\rho l + \frac{\rho\upsilon^2}{2}\zeta(t) \quad (8)$$

Здесь величина ΔP обозначает суммарный перепад давления,которыйопределяется по формуле:

$$\Delta P = \Delta P_\Sigma + \Delta P_{\text{зазор}} \quad (9)$$

Приведём уравнение (8) к безразмерному виду. Для этоговведем масштабы измерения скорости υ_o и времени t_o. Тогда безразмерные скорость wи время τ будут связаны с соответствующими размерными величинами соотношениямиw $= \frac{\upsilon}{\upsilon_0}$; $\tau = \frac{t}{t_0}$.

Тогда уравнение (8) преобразуется к виду:

$$\Delta P=\rho l\frac{\upsilon_0 dw}{t_0 d\tau}+\left[\frac{\upsilon_0 dw}{t_0 d\tau}\right]^{-1}\omega^2\upsilon_0^2 w^2\rho l+\frac{\rho\upsilon_0^2 w^2}{2}\zeta(t)$$

Разложим на составляющие величину ΔР:

$$\Delta P=\Delta P_{\text{стат}}+\frac{\rho\omega_p^2 R_p^2}{2}+\frac{\rho\omega_p^2 R_p^2}{2}\cdot\frac{\delta^2}{2R_p^2} \qquad (10)$$

В выражении (10) первое слагаемое – перепад давления статической, создаваемый внешним источником давления, второе слагаемое – давление, создаваемое центробежными силами инерции вращающейся в полости ротора, третье слагаемое – давление, создаваемое центробежными силами инерции вращающейся в зазоре между ротором и статором рабочей смеси. Учитывая выражение(10) преобразованное уравнение (6) примет следующий вид:

$$\frac{\Delta P_{\text{стат}} t_0}{\rho l\upsilon_0}+\frac{\omega_p^2 R_p^2 t_0}{\upsilon_0 l}\left[1+\frac{\delta^2}{2R_p^2}\right]=\frac{dw}{d\tau}+\left[\frac{dw}{d\tau}\right]^{-1}\omega^2 w^2 t_0^2+H_0 w^2\zeta(\tau)$$

Выберем следующие единицы измеренияскорости и времени$\upsilon_0=\frac{\Delta P_{\text{стат}} t_0}{\rho l}$ и $t_0=\frac{a_p}{\omega_p R_p}$. Тогда первое слагаемое в предыдущем уравненииобращается в единицу, а остальные примут следующий вид:

$$1+\frac{1}{H_0}\frac{a_p^2}{2l^2}\left[1+\frac{\delta^2}{2R_p^2}\right]=\frac{dw}{d\tau}+\left[\frac{dw}{d\tau}\right]^{-1}w^2\frac{a_p^2}{R_p^2}+H_0 w^2\zeta(\tau) \qquad (11)$$

Обозначим величины:

$$R_0=\frac{a_p^2}{2l^2}\left[1+\frac{\delta^2}{2R_p^2}\right];\ K_0=\frac{a_p^2}{R_p^2}$$

где: R_o – ротационный коэффициент;K_o– коэффициент Кориолиса.

Запишем уравнение (10) в безразмерном виде:

$$1+\frac{R_0}{H_0}=\frac{dw}{d\tau}+\left[\frac{dw}{d\tau}\right]^{-1}w^2 K_0+H_0 w^2\zeta(\tau) \qquad (12)$$

Ротационный коэффициент R_o учитывает вращение рабочей жидкости ещё и в зазоре, а не только в рабочей камере вращающегося ротора.

Таким образом, математическая модель течения рабочей среды в щелях многоступенчатого гидроударно-кавитационного устройства в виде дифференциального уравнения представлена уравнением (12). Однако, в целях упрощения, приведем другую форму этого уравнения. Введем коэффициент нестационарностиC_n, связанный с критерием гомохронности H_o соотношением$C_n=\frac{1}{H_0+1}$; $0<C_n<1$.

Тогда уравнение (11) примет вид:

$$1+\frac{C_n R_0}{1-C_n}=\frac{dw}{d\tau}+\left[\frac{dw}{d\tau}\right]^{-1}w^2 K_0+\frac{1-C_n}{C_n}w^2\zeta(\tau) \qquad (13)$$

Для расчета параметров нестационарных течений рабочей смеси в многоступенчатом гидроударно-кавитационномустройстве можно использовать как уравнение (12) так и уравнение (13). Разработанная гидродинамическая модель пригодна для расчета гидроударно-кавитационного устройства, работающего с рабочими жидкостями с коэффициентами динамической вязкости от 0 до 1 Па·с.