УДК 519.85

МОДЕЛИРОВАНИЕ И РЕШЕНИЕ ЗАДАЧ ОПТИМАЛЬНОГО ПЛАНИРОВАНИЯ И ОРГАНИЗАЦИИ ПРОИЗВОДСТВА

Аджигильдиев И.В., Молодцов А.Е.
научный руководитель канд.физ.-мат. наук, доцент Терещенко Ю.А.
Сибирский федеральный университет

Для того, чтобы спрограммировать необходимое количество различных ресурсов для производства определенного вида продукции, а также обеспечить предприятие-производителя их запасами и своевременными поставками для бесперебойной работы, менеджеры этих предприятий и организаций применяют различные программы и технологии по подсчету оптимальной загрузки производственных машин, ожидаемых издержек и планируемой в дальнейшем прибыли.

Одним из методов определения производственных параметров при выпуске того или иного материального блага является такой отдельный раздел прикладной математики как линейное программирование. Линейное программирование сформировалось в 40-50-х гг. XX века благодаря работам советского ученого, академика, лауреата Ленинской, Государственной и Нобелевской премий Леонида Витальевича Канторовича. Из его трудов видно, что при помощи определенного ряда логичных вычислений можно: спрограммировать оптимальную загрузку производственных мощностей и то, как будет протекать данный производственный процесс – с какими убытками и прибылью, определить степень износа тех или иных машин и производственной техники, составить предварительный отчет о результатах планируемой деятельности предприятия. Чтобы осуществить эти вычисления необходимо построить математическую модель поставленной экономической задачи, а именно определить следующее:

- Для каких величин должна быть построена модель? Иначе говоря, нужно идентифицировать переменные задачи.
- Какие ограничения должны быть наложены на переменные, чтобы выполнялись условия, характерные для моделируемой системы?
- В чем состоит цель, для достижения которой из всех возможных (допустимых) значений переменных нужно выбрать те, которые будут соответствовать оптимальному (наилучшему) решению задачи?

Рассмотрим одну из задач оптимального планирования и организации производства.

Мебельная фабрика выпускает книжные полки и шкафы. Их производство ограничено наличием необходимых ресурсов: древесно-стружечных плит (ДСП), высококачественных досок (ВД) и стекла.

Нормы затрат ресурсов на единицу продукции, запасы ресурсов и прибыль от реализации единицы продукции приведены в таблице. Требуется составить производственный план выпуска продукции с учётом имеющихся ресурсов, который обеспечивал бы наибольшую прибыль.

Виды ресурсов	Виды продукции		Запасы Ресурсов
	Полки	Шкафы	
ДСП	3	2	27
ВД	2	4	28
Стекло	2	3	23
Прибыль	4	7	

Теперь составим математическую модель данной экономической задачи.

Пусть x_1, x_2 – количество полок и шкафов соответственно, планируемое к выпуску.

Тогда суммарная прибыль от реализации всей плановой продукции (целевая функция) может быть представлена в виде

$$z = 4x_1 + 7x_2 \to max.$$

При этом общий расход ДСП равен $3x_1 + 2x_2$, и он не должен превышать имеющегося запаса 27. Это приводит кограничению $3x_1 + 2x_2 \leq 27$.

Аналогично учитываются ограничения по ВД и стеклу:

$$2x_1 + 4x_2 \leq 28,$$
$$2x_1 + 3x_2 \leq 23.$$

Так как объёмы выпускаемых изделий не могут быть отрицательны, тогда $x_1 \geq 0, x_2 \geq 0$.

Таким образом, математическая модель задачи имеет вид:

$$z = 4x_1 + 7x_2 \to max \tag{1}$$

$$\begin{cases} 3x_1 + 2x_2 \leq 27 \\ 2x_1 + 4x_2 \leq 28 \\ 2x_1 + 3x_2 \leq 23 \end{cases} \tag{2}$$

$$x_i \geq 0; (i = \overline{1,2}) \tag{3}$$

Т.е. необходимо найти неотрицательные значения x_i, $i = \overline{1,2}$, удовлетворяющие ограничениям (2), для которых функция z принимает наибольшее значение.

Для решения этой задачи построим область допустимых решений (ОДР), затем на этой области находят z_{max}.

Начнем решение задачи с геометрического представления ОДР.

Условия ограничивают ОДР первой четвертью. Каждое из неравенств определяет на координатной плоскости X_1OX_2 некоторую полуплоскость, а система неравенств, в случае ее совместности – их пересечение.

Находим полуплоскости, в которых выполняются данные неравенства. Для этого вследствие выпуклости любой полуплоскости достаточно взять произвольную точку, и проверить, удовлетворяет ли эта пробная точка ограничению-неравенству. Если удовлетворяет, то данное неравенство выполняется в полуплоскости, содержащей пробую точку. В противном случае берётся полуплоскость, не содержащая пробной точки. В качестве пробной точки часто удобно брать начало координат O(0;0).

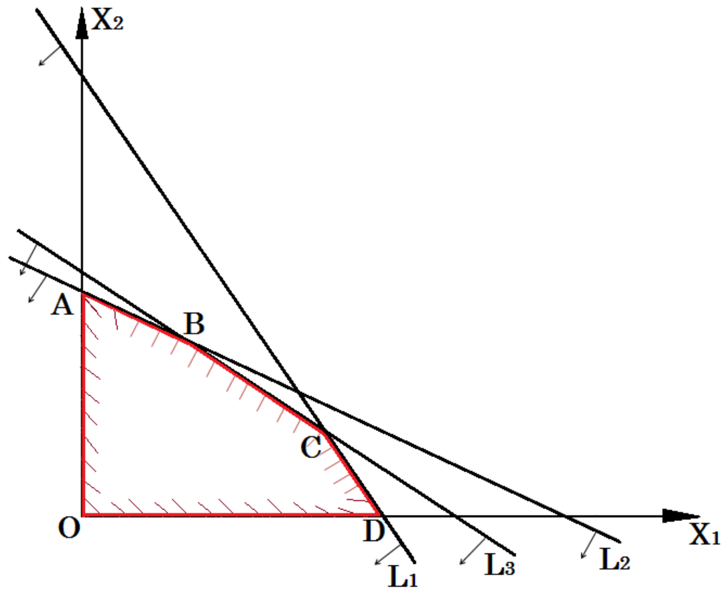
Заметим, что при построении ОДР ограничения-неравенства (2) лучше переписать как уравнения прямых в отрезках:

$$L_1: \frac{x_1}{9} + \frac{x_2}{\frac{27}{2}} = 1,$$

$$L_2: \frac{x_1}{14} + \frac{x_2}{7} = 1,$$

$$L_3: \frac{x_1}{\frac{23}{2}} + \frac{x_2}{\frac{23}{2}} = 1.$$

Для нашей задачи ОДР – это множество точек пятиугольника OABCD. На рисунке, приведенном ниже, изображены прямые L_1, L_2 и L_3, а стрелками указаны области, в которых выполняются соответствующие неравенства.



Перейдем к геометрической интерпретации целевой функции. Уравнение $z = c_1x_1 + c_2x_2 = 4x_1 + 7x_2$ при фиксированном значении $z = z_0$ определяет на плоскости прямую линию $z_0 = 4x_1 + 7x_2$. При изменении z получим семейство параллельных прямых, называемых **линиями уровня**. Вектор $\bar{c} = (c_1; c_2)$ с координатами при коэффициентах при x_1и x_2 перпендикулярен к каждой из линий уровня. Вектор показывает направление наибольшего возрастания (убывания) целевой функции.

Если построить на одном рисунке ОДР, вектор $\bar{c}$ и одну из линий уровня, например, $z = 0$, то задача сводится к определению в ОДР точки в направлении вектора $\bar{c}$, через которую проходит линия уровня z_{max} (z_{min}), соответствующая наибольшему (наименьшему) значению функции z. Перпендикулярно вектору c проводим линию уровня $z = 0$. Параллельным перемещение $z = 0$ находим крайнюю точку, в которой целевая функция достигает максимума. Так как эта точка находится на пересечении прямых L_2 и L_3, то координаты этой точки определяются системой уравнений:

$$\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 = 23 \\ 2x_1 + 4x_2 = 28 \end{cases}$$

Откуда, B(4;5), $z_{max} = z(B) = 4 \cdot 4 + 7 \cdot 5 = 51$. Это и есть искомый ответ задачи, который означает, что необходимо выпускать 4 полки и 5 шкафов, и именно при таких параметрах производства прибыль будет максимальной 51 ден. ед.

Подводя итог, можно сделать вывод, что с помощью линейного программирования можно находить оптимальные решения подобных экономических задач посредством предварительного построения их математических моделей.

Список литературы

1. Акулич И.Л., Математическое программирование в примерах и задачах [Текст]/ И.Л.Акулич.- М.:Высш. шк., 1986.

2. Бодров В.И., Математические методы принятия решений: учеб. пособие./ В.И.Бодров, Т.Я.Лазарева, Ю.Ф. Мартемьянов.- Тамбов: Изд-во Тамб. гос. тех. ун-та, 2004.

3. Вентцель Е.С., Исследование операций/ Е.С.Вентцель.- М.:Советское радио, 1972.