УДК 519.85

ПРИМЕНЕНИЕ МЕТОДОВ МАТЕМАТИЧЕСКОГО ПРОГРАММИРОВАНИЯ ПРИ ОПТИМИЗАЦИИ СЕБЕСТОИМОСТИ ПРОДУКЦИИ

Бочкарёва А.С., Дьякова Н.Н.,
научный руководитель Л.В. Климович
Сибирский Федеральный университет

В настоящее время нельзя назвать область человеческой деятельности, в которой не приходилось бы делать выбор. Многие задачи, с которыми приходится иметь дело, являются многовариантными. Однако решение, принимаемое интуитивно, не всегда являлось верным, экономически выгодным и оптимальным. При современных масштабах производства даже незначительные ошибки оборачиваются громадными потерями. В связи с этим возникла необходимость применять для анализа определенные новые метода расчета. Такие методы объединили под общим названием «математическое программирование».

Рассмотрим задачу, состоящую в определении минимального значения функции

$$F = \frac{c_1 \cdot x_1 + c_2 \cdot x_2}{d_1 \cdot x_1 + d_2 \cdot x_2} \tag{1}$$

при условиях

$$\begin{cases} a_{i1} \cdot x_1 + a_{i2} \cdot x_2 \le b_i \quad (i = \overline{1,m}), \\ \qquad\qquad x_j \ge 0. \end{cases} \tag{2}$$

Будем считать, что $d_1 \cdot x_1 + d_2 \cdot x_2 \ne 0$

Процесс нахождения решения задачи (1) — (2) включает следующие этапы:

1. В системе ограничений задачи заменяют знаки неравенств на знаки точных равенств и строят определяемые этими равенствами прямые.
2. Находят полуплоскости, определяемые каждым из неравенств системы ограничений задачи.
3. Находят многоугольник решений задачи.
4. Строят прямую, уравнение которой получается, если положить значение целевой функции равным некоторому постоянному числу.
5. Определяют точку минимума или устанавливают неразрешимость задачи.
6. Находят значение целевой функции в точке минимума.

Пример. Обувное производственное объединение для изготовления 2 различных моделей обуви ***A*** и ***B*** использует три типа технологического оборудования. Каждая модель обуви должна пройти обработку на каждом из 3 типов оборудования. Время обработки 1 изделия на оборудовании данного типа приведено в табл. 1. В ней же указаны затраты, связанные с производством одного изделия каждого вида.

Таблица 1.

Тип оборудования	Затраты времени на обработку одного изделия	
	A	***B***
I	2	8
II	1	1
III	12	3
затраты на производство одной модели обуви, тыс. руб.	2	3

Оборудование I и III типов предприятие может использовать не более 26 и 39 ч. При этом оборудование II типа целесообразно использовать не менее 4 ч.

Следует составить оптимальный план производства при минимальной себестоимости продукции.

Решение. Предположим, что предприятие изготовит x_1 моделей обуви ***A*** и x_2 изделий вида ***B***. Тогда общие затраты на их производство равны $2x_1 + 3x_2$ тыс. руб., а себестоимость одного изделия в рублях составит

$$F = \frac{2x_1 + 3x_2}{x_1 + x_2} \tag{3}$$

Затраты времени на обработку указанного количества изделий на каждом из типов оборудования соответственно составят $2x_1 + 8x_2$ часов, $x_1 + x_2$ часов и $12x_1 + 3x_2$ часов. Так как оборудование I и III типов может быть занято обработкой моделей вида ***A*** и ***B*** не более 26 и 39 ч, а оборудование II типа — не менее 4 ч, то должны выполняться следующие неравенства:

$$\begin{cases} 2x_1 + 8x_2 \le 26, \\ x_1 + x_2 \ge 4, \\ 12x_1 + 3x_2 \le 39, \\ x_j \ge 0. \end{cases} \tag{4}$$

Таким образом, математическая постановка задачи состоит в определении неотрицательного решения системы линейных неравенств (3), реализующего минимум функции (4). Такую задачу относят к дробно-линейному программированию. Чтобы найти решение задачи, построим многоугольник решений. Как видно из рис. 1, им является треугольник *BCD*. Значит, целевая функция принимает минимальное значение в одной из точек: *B*, *C* или *D*. Чтобы определить, в какой именно, положим значение функции F равным некоторому числу, например 11/4. Тогда

$$F = \frac{2x_1 + 3x_2}{x_1 + x_2} = \frac{11}{4} \qquad \text{или} \qquad -3x_1 + x_2 = 0 \tag{5}$$

Уравнение (5) определяет прямую, проходящую через начало координат. Координаты точек, принадлежащих этой прямой и многоугольнику решений, являются планами задачи, при которых значение функции (4) равно 11/4. В данном случае к указанным точкам относится лишь одна точка B (1; 3). Ее координаты определяют план задачи, при котором значение функции равно 11/4. Возьмем теперь h = 5/2, т. е. положим

$$\frac{2x_1 + 3x_2}{x_1 + x_2} = \frac{5}{2}, \quad \text{или} \qquad -x_1 + x_2 = 0 \tag{6}$$

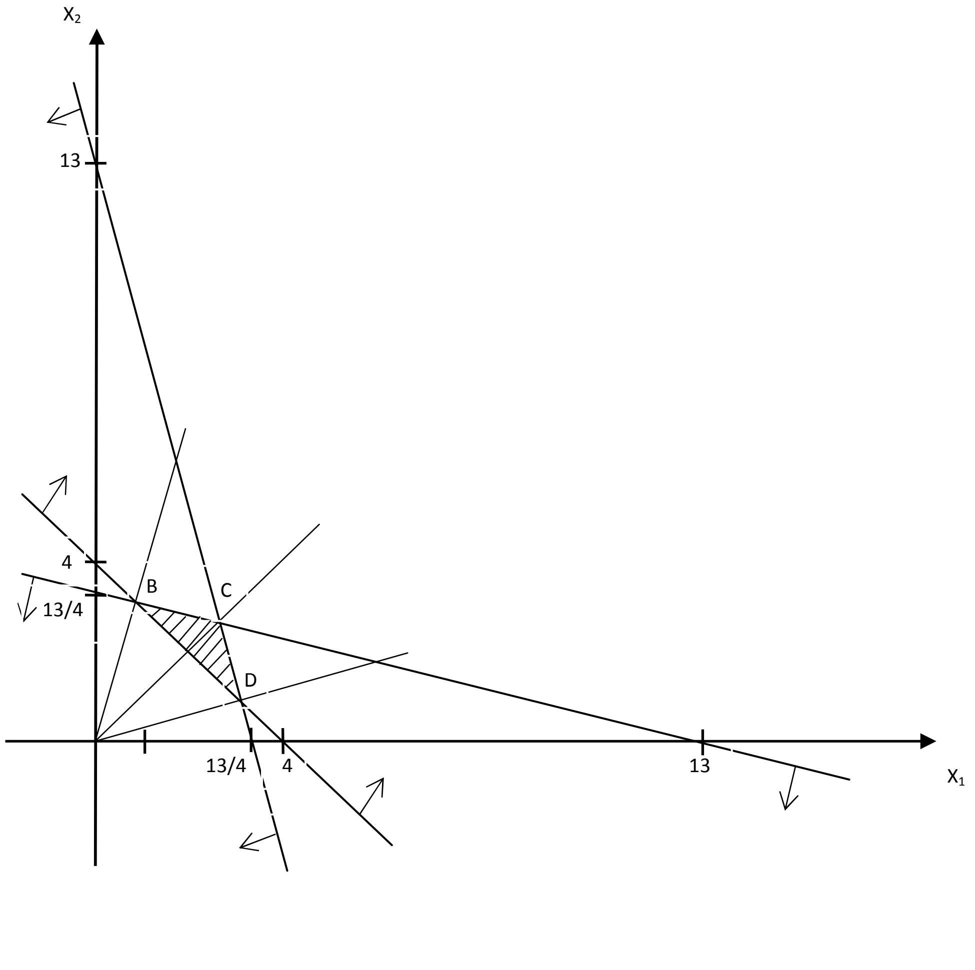

Рис. 1

Уравнение (6), так же как и (5), определяет прямую линию, проходящую через начало координат. Ее можно рассматривать как прямую, полученную в результате вращения по часовой стрелке вокруг начала координат прямой (5). При этом координаты точек, принадлежащих прямой (6) и многоугольнику решений, являются планами задачи, при которых значение целевой функции, равное 5/2, меньше, чем в точках прямой (5). Следовательно, если положить значение функции равным некоторому числу h_0:

$$F = \frac{2x_1 + 3x_2}{x_1 + x_2} = h_0, \tag{7}$$

а эту прямую, проходящую через начало координат, вращать в направлении движения часовой стрелки вокруг начала координат, то получим прямые

$$F = \frac{2x_1 + 3x_2}{x_1 + x_2} = h, \quad \text{где } h < h_0.$$

Найдем последнюю общую точку вращаемой прямой с многоугольником решений. Это точка D (3; 1) (рис. 1), в которой достигается минимум функции.

Таким образом, оптимальным планом производства продукции является план, согласно которому изготовляется 3 изделия вида A и 1 изделие вида B. При таком плане себестоимость одного изделия является минимальной и равна $F_{\min} = \frac{2\cdot 3 + 3\cdot 1}{1+3} = \frac{9}{4}$.

Ответ. $F_{\min} = \frac{9}{4}$.

При нахождении угловой точки многоугольника решений, в которой целевая функция задачи принимает наименьшее значение, мы полагали значение функции равным некоторым двум постоянным числам и установили направление вращения прямой, определяющее уменьшение значения функции. Это можно было сделать и по-другому. А именно: полагая значение функции F равным некоторому числу h, т. е.

$$\frac{2x_1 + 3x_2}{x_1 + x_2} = h, \tag{8}$$

и получив некоторую прямую, проходящую через начало координат и имеющую угловой коэффициент, зависящий от h, можно, используя производную, установить направление вращения прямой (8) при возрастании h.

Практически же дело обстоит гораздо проще. Найдя точки B (1; 3) и D (3; 1) (рис. 1), в которых функция может принимать минимальное значение, вычислим ее значения в этих точках: F (B)=11/4, F (D) = 9/4. Так как F (B) > F (D), то можно утверждать, что в точке D целевая функция принимает минимальное значение. Одновременно с этим заметим, что в точке B функция F принимает максимальное значение.

Список используемой литературы

1. Акулич И.Л., Математическое программирование в примерах и задачах [Текст]/ И.Л.Акулич.- М.:Высш. шк., 1986.

2. Бодров В.И., Математические методы принятия решений: учеб. пособие./ В.И.Бодров, Т.Я.Лазарева, Ю.Ф. Мартемьянов.- Тамбов: Изд-во Тамб. гос. тех. ун-та, 2004.

3. Вентцель Е.С., Исследование операций/ Е.С.Вентцель.- М.:Советское радио, 1972.