

ПРИМЕНЕНИЕ ОПЕРАЦИОННОГО ИСЧИСЛЕНИЯ ПРИ РАСЧЕТЕ ПЕРЕХОДНЫХ ПРОЦЕССОВ В ЭЛЕКТРИЧЕСКИХ ЦЕПЯХ

**Иванькова Д.И., Бахмутов Р.В.,
научный руководитель канд. пед. наук Бутакова С.М.
Сибирский федеральный университет**

Операционное исчисление играет важную роль в механике, автоматике, электротехнике. В основе этого метода лежит идея замены изучаемых функций (оригиналов $f(t)$) другими функциями (изображениями $F(p)$), получаемыми по определенным правилам (обычно, функция-изображение, получается из данной преобразованием Лапласа), причем действия над оригиналами заменяются более простыми действиями над изображениями.

В 1892 году появились работы английского ученого О. Хевисайда, посвященные применению метода символического исчисления к решению задач по теории распространения электрических колебаний в проводах. Труды Хевисайда положили начало систематическому применению операционного исчисления к решению физических и технических задач. Однако операционное исчисление не получило в трудах Хевисайда математического обоснования, многие его результаты оставались недоказанными. Строгое обоснование было дано значительно позже, когда была установлена связь между функциональным преобразованием Лапласа и оператором дифференцирования.

Одной из важных дисциплин профессионального цикла для студентов направления «Автоматизация технологических процессов и производств» является «Электротехника и электроника». Для освоения материала данного учебного курса необходимы знания и применение математического аппарата операционного исчисления.

Электротехника – область техники, связанная с получением, распределением, преобразованием и использованием электрической энергии. Электротехника выделилась в самостоятельную науку из физики в конце XIX века. Для становления электротехники решающее значение имело появление первого источника непрерывного тока – вольтова столба, а затем более совершенных гальванических элементов, что позволило провести многочисленные исследования химических, тепловых, световых и магнитных явлений, вызываемых электрическим током (труды В.В. Петрова, М. Фарадея, Дж. Генри, А.М. Ампера, Г.С. Ома и др.). В этот период были заложены основы электродинамики, открыт важнейший закон электрической цепи — закон Ома. Электрическая цепь – это совокупность различных элементов, образующих путь для прохождения электрического тока. Переходные процессы - процессы, возникающие в электрических цепях при различных воздействиях, приводящих к изменению их режима работы, то есть при действии различного рода коммутационной аппаратуры, например, ключей, переключателей для включения или отключения источника или приемника энергии, при обрывах в цепи, при коротких замыканиях отдельных участков цепи и т.д.

Цель нашей работы – систематизировать базовые знания по разделу операционное исчисление и провести расчеты конкретного переходного процесса в электрической цепи, используя операторный метод.

Формулировка задачи. Пусть имеется схема электрической цепи со следующими параметрами: $E = 100 \text{ В}$, $L = 0,005 \text{ Гн}$, $C = 0,00005 \text{ Ф}$, $R_1 = 2 \text{ Ом}$, $R_2 = 6 \text{ Ом}$, $R_3 = 8 \text{ Ом}$ (рис. 1). Определить ток ($i_1(t)$).

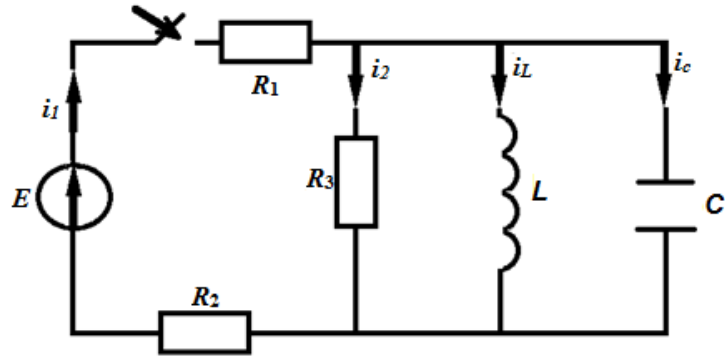


Рис. 1

Решение. Данную задачу можно решать классическим методом, суть которого заключается в составлении дифференциального уравнения для тока (закон изменения которого во времени нужно определять в послекоммутационной схеме), его решении и определении постоянных интегрирования. Решение дифференциального уравнения записывается в виде суммы частного решения неоднородного уравнения (принужденный или установившийся режим) и общего решения однородного уравнения (свободный режим работы цепи, освобожденный от внешних источников энергии, когда учитывают действия только внутренних сил). Далее представим решение задачи операторным методом, так как он, с нашей точки зрения, является более рациональным.

С физической точки зрения в рамках поставленной задачи имеем следующие начальные условия при $t = 0_-$, $i_1(0_-) = 0$, $i_L(0_-) = 0$, $u_c(0_-) = 0$. Для момента коммутации при $t = 0_+$ определим ток: $i_L(0_+) = 0$, $u_c(0_+) = 0$.

По операторной схеме определим ток в цепи с одним источником (рис.2).

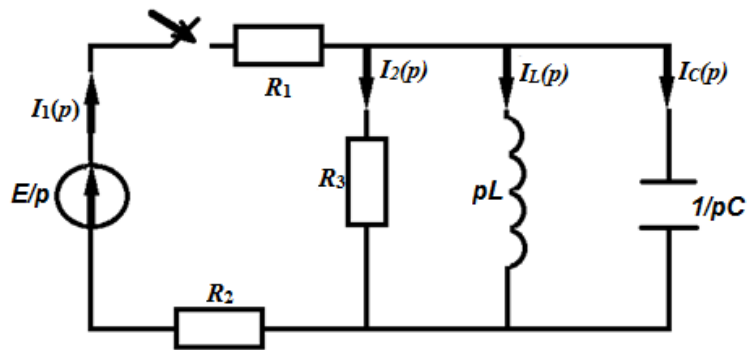


Рис. 2

Исходя из закона Ома для полной цепи, записываем выражение для нахождения тока $I_1(p)$:

$$I_1(p) = \frac{\frac{E}{p}}{R_1 + R_2 + \frac{R_3 p L \frac{1}{p C}}{R_3 L p + \frac{R_3}{p C} + \frac{p L}{p C}}}. \quad (1)$$

Подставив значения сопротивлений R_1, R_2, R_3 и напряжения E в уравнение (1), проведя элементарные преобразования, получим:

$$I_1(p) = \frac{100}{p} \frac{8Lp^2C + Lp + 8}{64Lp^2C + 16Lp + 64} = F(p). \quad (2)$$

Подставим в (2) значения индуктивности L и емкости C в схеме получим:

$$F(p) = \frac{25}{16} \frac{0,000002p^2 + 0,005p + 8}{p(0,00000025p^2 + 0,00125p + 1)}.$$

Найдем корни квадратного уравнения в знаменателе:

$$p_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = \frac{-0,00125 \pm 0,00075}{0,00000025}; \quad p_1 = -4000, \quad p_2 = -1000.$$

Разложим знаменатель правильной рациональной дроби на множители:

$$F(p) = \frac{25}{16} \cdot \frac{0,000002p^2 + 0,005p + 8}{0,00000025p(p + 4000)(p + 1000)} = 6250000 \frac{0,000002p^2 + 0,005p + 8}{p(p + 4000)(p + 1000)}.$$

Представим полученную дробь как сумму простейших дробей:

$$F(p) = 6250000 \cdot \left(\frac{A}{p} + \frac{B}{p + 4000} + \frac{C}{p + 1000} \right). \quad (3)$$

Методом частных значений найдем коэффициенты A, B, C , подставляя корни знаменателей простейших дробей в уравнение:

$$A(p + 4000)(p + 1000) + Bp(p + 1000) + Cp(p + 4000) = 0,000002p^2 + 0,005p + 8.$$

$$\begin{array}{l|l} p = 0 & 4000000A = 8, \\ p = -4000 & 12000000B = 20, \\ p = -1000 & -3000000C = 5; \end{array}$$

$$A = 0,000002, \quad B = 0,000001666, \quad C = -0,000001666.$$

Подставив полученные коэффициенты в выражение (3) получим:

$$F(p) = 6250000 \cdot \left(\frac{0,000002}{p} + \frac{0,000001666}{p + 4000} - \frac{0,000001666}{p + 1000} \right) = \frac{12,5}{p} + \frac{10,4125}{p + 4000} - \frac{10,4125}{p + 1000}.$$

Используя таблицу оригиналов и изображений и свойства преобразования Лапласа, получим функцию тока в цепи (оригинал изображения):

$$i_1(t) = 12,5 + 10,4125e^{-4000t} - 10,4125e^{-1000t} \approx 12,5 + 10,4e^{-4000t} - 10,4e^{-1000t} = f(t).$$

Подводя итог, отметим, что операционное исчисление используется в физических и технических задачах достаточно широко (в том числе и в электротехнике), позволяет в ряде случаев сводить исследование дифференциальных и некоторых интегральных операторов и решение линейных дифференциальных уравнений к рассмотрению более простых алгебраических задач.

Список литературы

1. Егорова И.П. Высшая математика. Элементы операционного исчисления и его приложения: учебное пособие / И.П. Егорова. Сызрань: Сызранский филиал Самарского гос. техн. ун-та., 2008. - 58 с.
2. Пантелеев А.В. Теория функций комплексного переменного и операционное исчисление в примерах и задачах: учебное пособие / А. В. Пантелеев, А.С. Якимова. – М.: Высшая школа, 2001. – 445 с.