УДК 517.972.8

ПОИСК ОПТИМАЛЬНОГО РЕШЕНИЯ В ЗАДАЧАХ ЭЛЕКТРОТЕХНИКИ

Найдешкин И.П., Кулигин В.А., Мазуров Н.А.,
научный руководитель ст. преподаватель Арасланова М.Н.
Сибирский федеральный университет

Задачи, решение которых привело к понятию производной функции, ставились с давних пор. Выделяются два круга совершенно не связанных между собой задач:
1) нахождение наибольших и наименьших значений (экстремумов различных величин),
2) проведение касательных к кривым и вычислению скорости.
Задачи на экстремум постоянно возникали в практической деятельности, поскольку люди всегда интересовались вопросами: что больше? Кто быстрее? Что длиннее?

В Древней Греции задачи на отыскание наибольших и наименьших значений были достаточно популярны. Задачи такого типа содержатся в трудах Евклида и Архимеда. Но в древности и в средние века такие задачи решались геометрическими и механическими способами, не связанными общей идеей. И только в XVII веке было обнаружено, что все эти задачи можно решить единым методом, используя бесконечно малые величины. Развитие этого метода в трудах Ньютона и Лейбница привело к созданию математического анализа, появление которого широко раздвинуло границы применения математики.

В 1638 году Пьер Ферма, используя алгебраические методы, сформулировал *необходимое условие существования в точке экстремума*. На современном языке оно звучит так: если функция $f(x)$, дифференцируемая в интервале $(a; b)$, имеет в точке x_0, $a<x_0<b$, экстремум, то ее производная в этой точке равна нулю.

В 1683 году Готфрид Лейбниц печатает статью «Новый метод максимумов и минимумов», в которой содержится *достаточный признак экстремума функции*: если в точке x_0 первая производная функции равна нулю, а вторая отлична от нуля, то x_0 – это точка экстремума функции, причем, если вторая производная в этой точке положительна, то x_0 – точка минимума; если отрицательна, то x_0 – точка максимума.

Работы Лейбница составляют фундамент математического анализа. После его работ и трудов его ближайших сподвижников не только появился математический анализ, но вся математика вступила в новую эпоху.

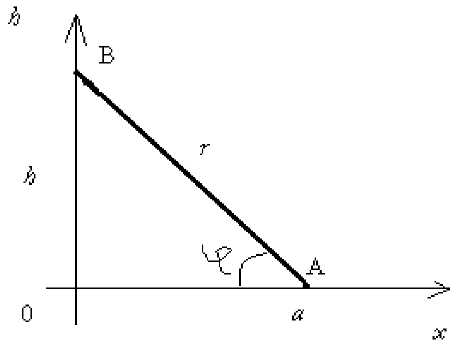
В электротехнике большое значение имеют задачи на поиск оптимального решения: расчет параметров электротехнических приборов, при которых в цепи будет наименьшее сопротивление или наибольшая мощность.

Задача 1. Пусть электрическая лампочка может передвигаться по вертикали OB (оси $0h$). На плоскости, перпендикулярной OB, возьмем точку A (на оси $0x$). На какой высоте надо подвесить лампу, чтобы в точке A была наилучшая освещенность (рис. 1).

Решение. Поместим лампу в точку B, и пусть AB = r, OB = h, OA = a, $\angle OAB = \varphi$. Известно, что освещенность в точке A определяется по закону

$$I = c\frac{\sin\varphi}{r^2},$$

где с – коэффициент пропорциональности.



Так как по теореме Пифагора $r^2 = h^2 + a^2$, $\sin\varphi = \frac{h}{r}$, то $I(h) = c\frac{h}{(h^2+a^2)^{3/2}}$.

Рис. 1

По смыслу задачи $0 \le h < \infty$. Найдем максимум данной функции, приравнивая первую производную функции $I(h)$ к нулю:

$$I'(h) = c\frac{a^2 - 2h^2}{(h^2+a^2)^{5/2}} = 0 \text{ при } h = \frac{a}{\sqrt{2}}.$$

Первая производная при переходе через эту точку меняет знак с «+» на «–», $h = \frac{a}{\sqrt{2}}$ – точка максимума. Наибольшее значение функции $I\left(\frac{a}{\sqrt{2}}\right) = \frac{2c}{3\sqrt{3}a^2}$ >0. Таким образом, лампу надо подвесить на высоте $h = \frac{a}{\sqrt{2}}$.

При решении двух других задач проведем экспериментальную проверку, собирая электрическую цепь переменного тока в системе схемотехнического моделирования NI multisim 10 (компания – разработчик Electronics Workbench Group). Изменяя параметры того или иного объекта, входящего в цепь и запуская схему, сможем проследить изменения мощности прибора, измеряя ее Ваттметром.

Задача 2. Электронагревательный прибор потребляет мощность от источника тока, ЭДС которого равна 3 В, а внутреннее сопротивление равно 2 Ом. Какое сопротивление должен иметь прибор, чтобы в нем выделялась максимальная мощность?

Решение. Мощность, потребляемая электронагревательным прибором, сопротивление которого равно R, находится по формуле:

$$P = \frac{\varepsilon^2 R}{(r+R)^2}.$$

Обозначим сопротивление прибора $R = x$. С учетом данных задачи составим функцию $y = P(x) = \frac{9x}{(2+x)^2}$. Область определения данной функции интервал (0; +∞).

Исследуем полученную функцию на экстремум.

$$y' = \left(\frac{9x}{(x+2)^2}\right)' = \frac{9(x+2)^2 - 18x(x+2)}{(x+2)^4} = \frac{18-9x}{(x+2)^3}.$$

Критические точки находим, приравнивая производную к нулю:

$18 - 9x = 0$, $x = 2 \in (0; +\infty)$, $(x+2)^3 = 0$, $x = -2 \notin (0; +\infty)$.

Первая производная при переходе через точку меняет знак с «+» на «–», $x = 2$ – точка максимума. Значит, мощность, потребляемая прибором, будет наибольшей, если сопротивление его равно 2 Ом и равна P(2) = 1,125 Вт.

Проверим экспериментально, изменяя сопротивление прибора от 1 до 3 Ом, и измеряя мощность ваттметром. Результаты представлены на рисунках 2,3,4.

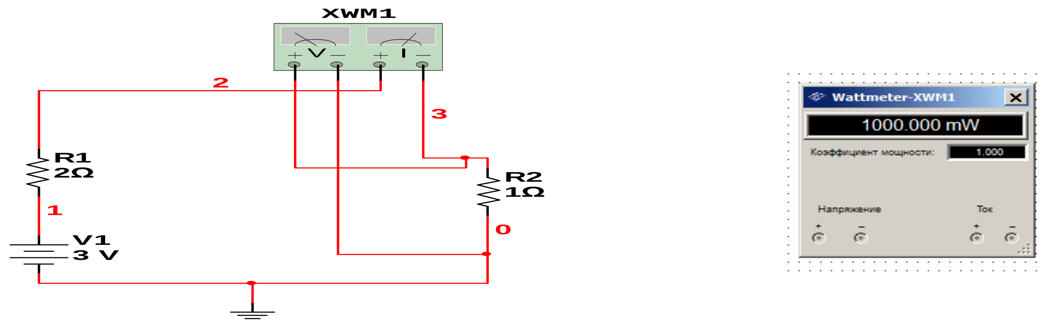


Рис. 2 - Сопротивление прибора 1 Ом

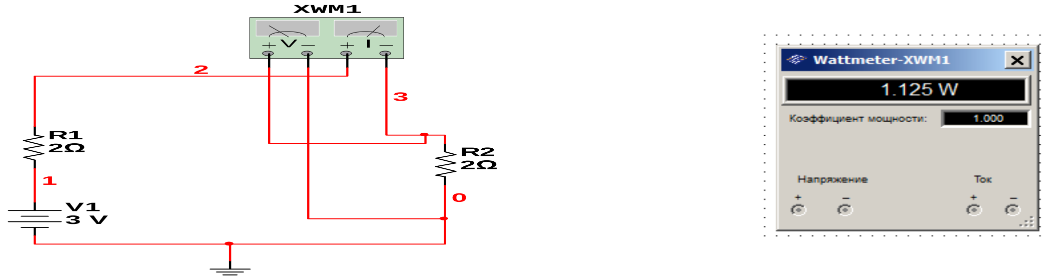


Рис. 3 - Сопротивление прибора 2 Ом

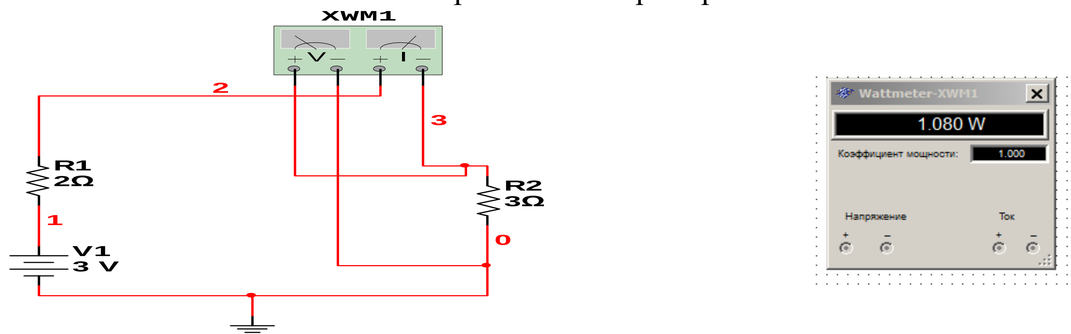


Рис. 4 – Сопротивление прибора 3 Ом

Подтвердился теоретический вывод о том, что наибольшая мощность в 1,125 Вт выделится при установленном сопротивлении потребителя в 2 Ом.

Задача 3. Цепь переменного тока состоит из источника переменного напряжения, активного сопротивления R, конденсатора емкостью C и катушки с индуктивностью L. При какой частоте переменного тока полное сопротивление цепи будет наименьшим?

Решение. Полное сопротивление этой цепи находят по формуле

$$Z=\sqrt{R^2+\left(\omega L-\frac{1}{\omega C}\right)^2},$$

где $\omega=2\pi\nu$– циклическая частота, ν – частота переменного тока. Обозначим $\omega = x$ и рассмотрим функцию $y(x)=\sqrt{R^2+\left(Lx-\frac{1}{Cx}\right)^2}$. Область определения функции (0; +∞).

Найдем критические точки, приравнивая первую производную к нулю:

$$y'(x)=\left(\sqrt{R^2+\left(Lx-\frac{1}{Cx}\right)^2}\right)'=\frac{L^2x-\frac{1}{C^2x^2}}{\sqrt{R^2+\left(Lx-\frac{1}{Cx}\right)^2}}.$$

$$L^2x-\frac{1}{C^2x^2}=0,\ L^2C^2x^4-1=0,\ x=\frac{1}{\sqrt{LC}}-\text{ критическая точка.}$$

Найдем вторую производную для ответа на вопрос:

$$y''(x)=\left(\frac{L^2x-\dfrac{1}{C^2x^2}}{\sqrt{R^2+\left(Lx-\dfrac{1}{Cx}\right)^2}}\right)'=\frac{L^2R^2-\dfrac{2L^3}{C}+\dfrac{6L^2}{C^2x^2}+\dfrac{3R^2}{C^2x^4}-\dfrac{6L}{C^3x^4}+\dfrac{2}{C^4x^6}}{R^2+\left(Lx-\dfrac{1}{Cx}\right)^2}.$$

Ее значение в точке $x=\dfrac{1}{\sqrt{LC}}$ равно $\dfrac{4L^2}{R}>0$, следовательно, функция $y(x)$ в данной точке принимает наименьшее значение равное R, при $\omega=\dfrac{1}{\sqrt{LC}}$ или $v=\dfrac{1}{2\pi\sqrt{LC}}$.

Полное сопротивление этой цепи принимает наибольшее значение, равное ее активному сопротивлению при $v=\dfrac{1}{2\pi\sqrt{LC}}=\dfrac{1}{2\cdot 3{,}14\sqrt{4\cdot 10^{-6}\cdot 0{,}32\cdot 10^{-3}}}=4500\,\text{Гц}$. Сила тока при этом, согласно закону Ома, достигает наибольшего значения.

Для экспериментальной проверки составим электрическую цепь из:

- источника переменного напряжения регулируемой частоты,
- конденсатора емкостью 4 мкФ,
- катушки с индуктивностью 0,32 Гн,
- электрической лампочки в 25 Вт.

Изменяя диапазон частот источника переменного напряжения от 20 Гц до 20000 Гц, получаем что наибольшей мощности лампа достигает при частоте переменного тока 4500 Гц, яркость лампочки максимальная, в некоторых случаях изменения ведут к разрыву цепи. (рис. 5,6).

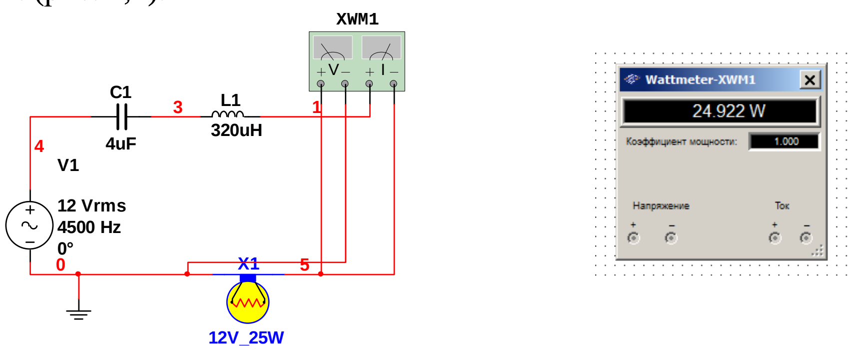


Рис. 5

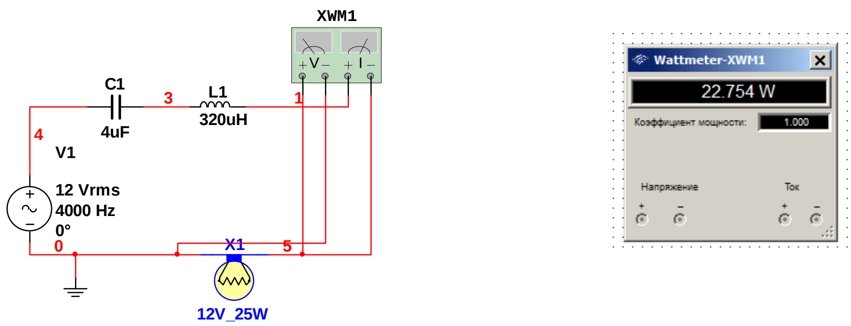


Рис. 6

Явление резкого возрастания силы тока в цепи переменного тока при частоте $\nu = \dfrac{1}{2\pi\sqrt{LC}}$ известно в электротехнике и называется резонансом в электрической цепи. Одновременно с ростом силы тока при резонансе резко возрастают напряжения на конденсаторе и катушке индуктивности. Эти напряжения при малом активном сопротивлении во много раз превосходят внешнее напряжение. В некоторых случаях резонанс в электрической цепи может принести большой вред: чрезмерно большие токи могут нагреть провода, привести к пробою изоляции. Всего этого можно избежать при оптимальном распределении параметров электрической цепи.