УДК 517.92

ФИЗИЧЕСКИЙ СМЫСЛ РЕШЕНИЯ ЛИНЕЙНЫХ НЕОДНОРОДНЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ С ПОСТОЯННЫМИ КОЭФФИЦИЕНТАМИ

Осипов М.В.
Научный руководитель канд. физ.-мат. наук Осипов В.В.
Сибирский Федеральный Университет

В качестве эпиграфа к своему выступлению позвольте привести слова Ф. Энгельса из его знаменитой работы «Анти-Дюринг»: «Математика имеет своим предметом пространственные формы и количественные отношения реального мира». В данном случае значимо происхождение предмета изучения: реальный мир.

К сожалению, в силу предметной расчлененности содержания профессионального образования, в каждой дисциплине вычленяется свой предмет изучения, который рассматривается свойственными для этой дисциплины методами. В то же время привлечение межпредметных связей, в данном случае механического, электротехнического смыслов позволит осознанно использовать математический аппарат для решения инженерных задач.

Будем рассматривать дифференциальные уравнения вида

$$y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + \ldots + a_n y + a_{n+1} = f(t). \qquad (1)$$

как математическую модель некоторого физического процесса.

Математическая модель – это некий заменитель реального объекта, отражающий в математической форме его важнейшие связи. Исследование этой модели (т.е. решение математической задачи) позволяет получить характеристики реального физического объекта.

Известно, что решение этого уравнения $Y = \bar{y} + y^*$ состоит из двух частей: $\bar{y}$ – общее решение однородного дифференциального уравнения

$$y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + \ldots + a_n y + a_{n+1} = 0, \qquad (2)$$

а y^* – частное решение неоднородного уравнения (1).

В общем случае отыскание y^* осуществляется методом вариации произвольных постоянных. Для частных случаев $f(t)$ структура y^* определена.

Физический смысл решения (2) как решения однородного уравнения заключается в том, что $\bar{y}$ описывает процесс свободных колебаний электрической или механической системы (2). Функция $f(t) = e^{-\alpha t}\cos(\omega t + \varphi)$ выступает для этой системы возмущающей (вынуждающей) силой, которая изменяет поведение системы в соответствии и в зависимости от вида правой части $f(t)$. Во многих случаях интеграл y^* определяется видом $f(t)$.

В случае свободных колебаний системе сообщается запас энергии, затем система предоставляется сама себе. Свободные колебания являются затухающими.

Покажем справедливость этого утверждения. Рассмотрим дифференциальное уравнение

$$y''' + 3y'' + 4y' + 2y = e^{-t}\sin t \tag{3}$$

Для нахождения $\bar{y}$, которая физически будет представлять свободные колебания, составим характеристическое уравнение

$$k^3 + 3k^2 + 4k + 2 = 0\,.$$

Первый корень определим подстановкой $k_1 = -1$.

Для нахождения других корней

$$\frac{k^3 + 3k^2 + 4k + 2}{k+1} = k^2 + 2k + 2$$

Найдем корни уравнения $k^2 + 2k + 2 = 0$.

Получим

$$k_{2,3} = -1 \pm \sqrt{1^2 - 2} = -1 \pm i\,.$$

Для найденных корней определяется общее решение

$$\bar{y} = c_1 e^{-t} + c_2 e^{-t}\cos t + c_3 e^{-t}\sin t$$

или

$$\bar{y} = e^{-t}\left(c_1 + c_2\cos t + c_3\sin t\right). \tag{4}$$

Из (4) видно, что за счет экспоненты e^{-t} $\bar{y}$ будет описывать затухающий процесс.

Известно, что колебательный процесс под воздействием периодической возмущающей силы может привести к резонансу. Рассмотрим соответствие математического описания и физической природы этого частного случая.

Пусть задано уравнение

$$y'' + \alpha^2 y = \sin\alpha t\,. \tag{5}$$

Для нахождения $\bar{y}$ составим характеристическое уравнение $k^2+\alpha^2=0$. Найдем его корни, получим $k_{1,2}=\pm\alpha i$. Свободные колебания описываются $\bar{y}=c_1\cos\alpha t+c_2\sin\alpha t$.

Здесь необходимо отметить, что в данном случае частота свободных колебаний системы совпадает с частотой возмущающей силы $f(t)=\sin\alpha t$.

Математически это выражается множителем *t* в решении $y^*=\left(A\cos\alpha t+B\sin\alpha t\right)t$.

Для определения коэффициентов *A* и *B* находим $y^{*\prime}$ и $y^{*\prime\prime}$, и подставляя их в (5), сравнивая коэффициенты при sin*αt* и cos*αt* в левой и правой частях полученного тождества, имеем $y^*=-\dfrac{t}{2\alpha}\cos\alpha t$.

Окончательно, общее решение уравнения (5) имеет вид:

$$Y=\bar{y}+y^*=c_1\cos\alpha t+c_2\sin\alpha t-\frac{t}{2\alpha}\cos\alpha t. \tag{6}$$

Из (6) видно, что при $t\to\infty$ амплитуда *Y* неограниченно возрастает, что характеризует явление резонанса. В этом физический смысл совпадения частоты свободных и вынужденных колебаний.

Одной из характеристик динамической системы, её фундаментальным свойством, является устойчивость системы. Устойчивость – это свойство системы возвращаться в заданный или близкий к нему установившийся режим после какого-либо возмущения. Устойчивость линейной системы определяется не характером возмущения, а структурой самой системы.

Будем опираться на алгебраические критерии устойчивости, позволяющие судить об устойчивости динамической системы по коэффициентам характеристического уравнения.

Необходимым условием устойчивости системы любого порядка является положительность всех коэффициентов характеристического уравнения

$$a_0y^{(n)}+a_1y^{(n-1)}+\ldots+a_n=0.$$

Заметим, что для систем первого и второго порядка необходимое условие является и достаточным условием устойчивости.

Пример 1. Пусть математическая модель системы задана уравнением

$$12y^{(4)}+2y^{(2)}+4y^{(1)}+50=0.$$

Тогда характеристическое уравнение системы имеет вид $12k^4+2k^2+4k+50=0$, т.к. $a_1=0$, система неустойчива.

Пример 2. Система задана математической моделью

$$3y^{(5)}+10y^{(4)}+5y^{(3)}-7y^{(2)}+y^{(1)}+100=0.$$

Система неустойчива, т.к. $a_3=-7<0.$ Нарушено необходимое условие устойчивости.

Конструктивным критерием устойчивости является критерий Гурвица, открытый немецким математиком А. Гурвицем в 1895 году.

В соответствии с критерием Гурвица достаточные условия устойчивости имеют вид:

$$\Delta_1 = a_1 > 0; \Delta_2 = \begin{vmatrix} a_1 & a_3 \\ a_0 & a_2 \end{vmatrix} > 0; \Delta_3 = \begin{vmatrix} a_1 & a_3 & a_5 \\ a_0 & a_2 & a_4 \\ 0 & a_1 & a_3 \end{vmatrix} > 0; \Delta_n = \begin{vmatrix} a_1 & a_3 & a_5 & \cdots & 0 \\ a_0 & a_2 & a_4 & \cdots & 0 \\ 0 & a_1 & a_3 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & a_n \end{vmatrix} > 0.$$

Пример 3. Система задана математической моделью

$$2y''' + 10y'' + 10y' + 15 = 0.$$

Необходимое условие устойчивости выполнено, все коэффициенты положительны ($a_0 = 2; a_1 = 6; a_2 = 10; a_3 = 15$).

Проверка достаточного условия устойчивости состоит в определении знака определителя второго порядка

$$\begin{vmatrix} a_1 & a_3 \\ a_0 & a_2 \end{vmatrix} = a_1 a_2 - a_0 a_3 = \begin{vmatrix} 6 & 15 \\ 2 & 10 \end{vmatrix} = 60 - 30 = 30 > 0.$$

Вывод: система устойчива по критерию Гурвица.

Другими словами, работая с математической моделью динамической системы, можно определить её физические, фундаментальные свойства – устойчивость, важные для инженерных приложений.

С целью исследования процесса изменения свойства устойчивости динамической системы разработана программа, вычисляющая определители Гурвица. При конкретных значениях коэффициентов характеристического уравнения с помощью этой программы определяется устойчивость системы, а изменения этих коэффициентов (естественная для практики их вариативность) позволяют определить границу устойчивости, что чрезвычайно важно для технических приложений (неустойчивая система разрушается).

Выводы и результаты:

1. *Изучены* дополнительно вопросы приложения математики к исследованию электрической и механической системы, вопросы устойчивости динамических систем.
2. *Осознана* необходимость использования физического смысла математических моделей, важная для технических приложений математического аппарата.
3. *Представлены примеры* использования математических моделей для выявления характеристик реального физического процесса, связь математического описания и физической природы явлений резонанса.
4. *Разработана программа,* позволяющая исследовать устойчивость линейной системы и определить сохранение этого свойства при вариациях параметров системы (параметрическая устойчивость).
5. *Перспективы* исследования: устойчивость в нелинейных системах.