УДК 51

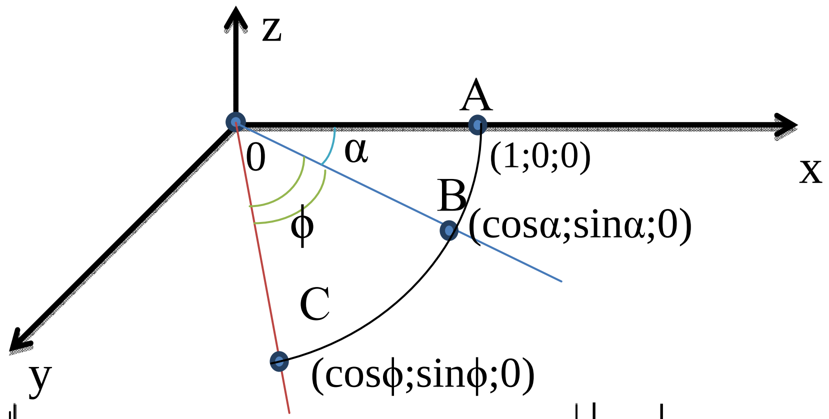
СЛОЖЕНИЕ ПОВОРОТОВ В ТРЁХМЕРНОМ ПРОСТРАНСТВЕ

Арефьев Н. А.,
научный руководитель к. ф.-м. н., Степаненко Виталий Анатольевич.
МБОУ СОШ №149

СЛОЖЕНИЕ ПОВОРОТОВ В ПЛОСКОСТИ

При реализации пространственных вращений возникает трудный вопрос о сложении двух поворотов.

В плоскости проблема решается путём умножения 2 матриц по правилу «строка – на столбец». Получившаяся матрица задаёт вращение в плоскости



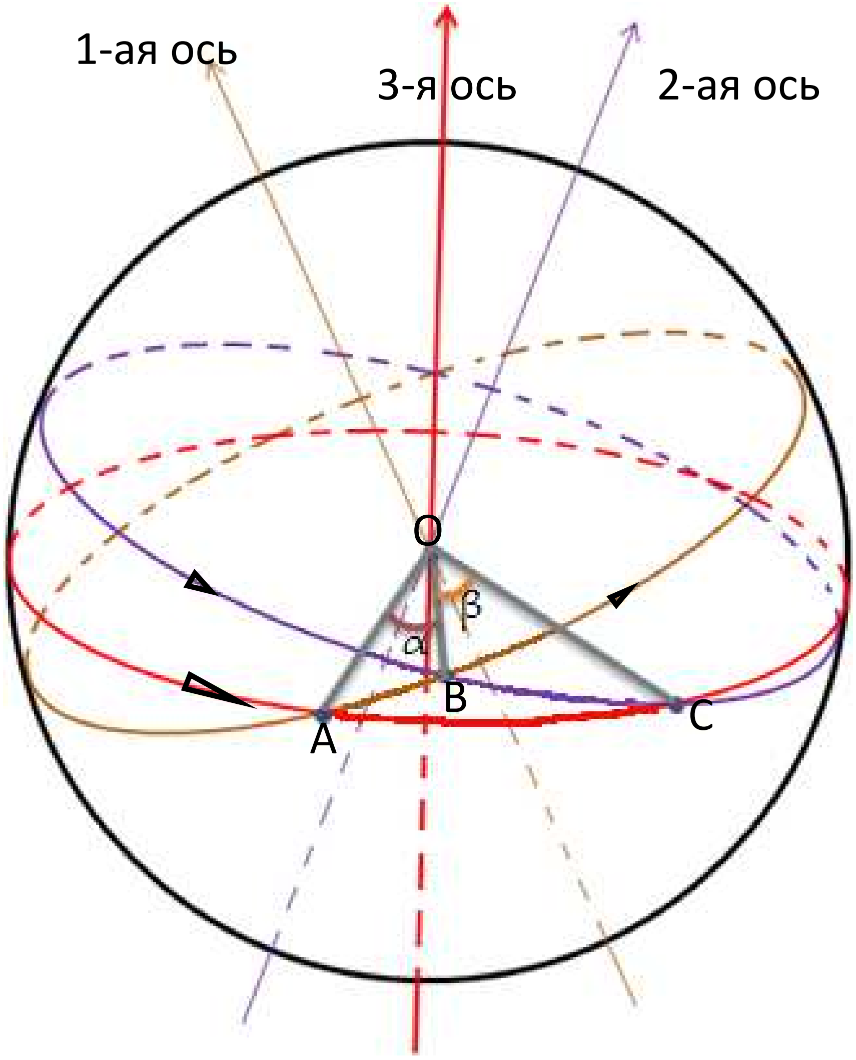
$$\begin{Vmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi & 0 \\ \sin\varphi & \cos\varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{Vmatrix} * \begin{Vmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha & 0 \\ \sin\alpha & \cos\alpha & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{Vmatrix} =$$

$$= \begin{Vmatrix} \cos(\varphi+\alpha) & -\sin\alpha(\varphi+\alpha) & 0 \\ \sin\alpha(\varphi+\alpha) & \cos\alpha(\varphi+\alpha) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{Vmatrix}$$

В данном случае ось вращения одна и та же – Oz. Когда оси разные, то требуется найти 3-ю ось и 3-ий угол, которые задают суммарный поворот.

СЛОЖЕНИЙ ДВУХ ПОВОРОТОВ В ПРОСТРАНСТВЕ

Возьмём сферу единичного радиуса.



Осуществляются 2 поворота: 1-й вокруг 1-й оси на угол α и 2-й вокруг второй оси на угол β. Суммарный поворот – это поворот вокруг 3-й оси на суммарный угол γ.

Первая ось (0, 0, 1) – вертикальная (вдоль Oz)

Вторая ось (0, 1, 0) – горизонтальная (вдоль Oy)

Третья ось, направляющий вектор которой имеет координаты $\{\frac{\sin\beta}{\sqrt{1+\mathrm{Cos}\alpha^2}}, \frac{\cos\alpha}{\sqrt{1+\mathrm{Cos}\alpha^2}}, \frac{-\cos\beta}{\sqrt{1+\mathrm{Cos}\alpha^2}}\}$

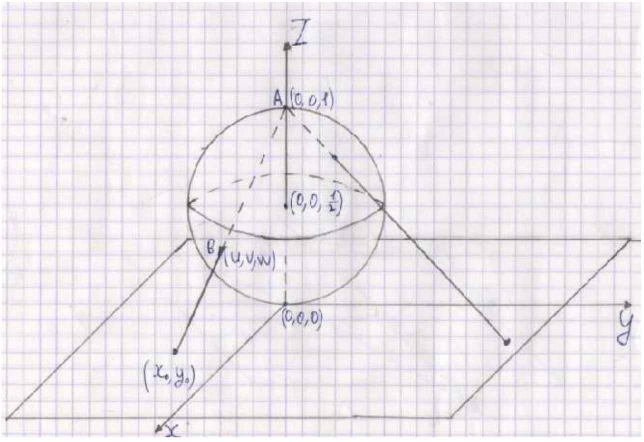
$\cos\gamma = \frac{\cos\alpha * \cos\beta}{\sqrt{1}*\sqrt{1}} = \boldsymbol{\cos\alpha * \cos\beta}$

Итак, мы нашли 3-ю (суммарную) ось и 3-й (суммарный) угол поворота.

СТЕРЕОГРАФИЧЕСКАЯ ПРОЕКЦИЯ

Существует способ сопоставить каждому повороту в пространстве (повороты в пространстве – это сложный объект) движение в плоскости (это простой объект) – этот способ называется «стереографическая проекция». Суть этого способа заключается в том, чтобы отобразить точки сферы на плоскость.

Для этого нужно взять сферу радиуса $\frac{1}{2}$ с центром (0, 0, $\frac{1}{2}$) её уравнение: $x^2+y^2+(z-\frac{1}{2})^2=\frac{1}{4}$ и отобразить её на плоскости xOy.



$\mathbf{x_0 = \frac{u}{1-w} y_0 = \frac{v}{1-w} z_0 = 0}$

$\mathbf{u=\frac{x_0}{1+{x_0}^2+{y_0}^2} v=\frac{y_0}{1+{x_0}^2+{y_0}^2} w=\frac{{x_0}^2+{y_0}^2}{1+{x_0}^2+{y_0}^2}}$.

Кривая, спроектировавшаяся на плоскость – это окружность, заданная урaснением

$\mathbf{(x+2*\frac{\alpha_1}{\gamma_1})^2+(y+2*\frac{\beta_1}{\gamma_1})^2 = (\frac{2}{\gamma_1})^2}$

Итак, мы получили окружность на плоскостиz=-1 с центром в точке

(-2*$\frac{\alpha_1}{\gamma_1}$; -2*$\frac{\beta_1}{\gamma_1}$). Значит, 1-й «экватор» спроецировался в окружность радиуса $R_1=\frac{2}{\gamma_1}$.

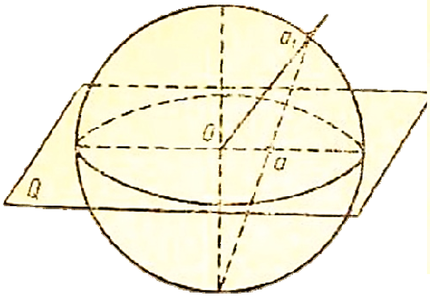
Если же γ_1=0, то эти экваторы переходят в меридианы, а меридианы – впрямые, проходящие через начало координат.

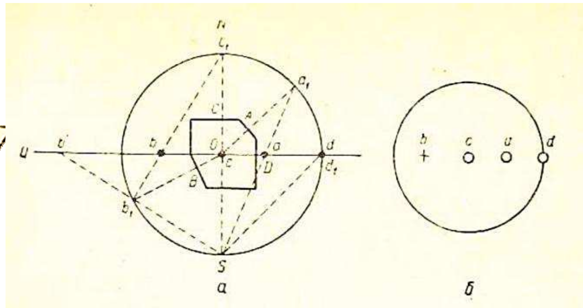
2-й «экватор», аналогично, спроецировался в окружность на той же плоскости z=-1 с центром в точке (-2*$\frac{\alpha_2}{\gamma_2}$; -2*$\frac{\beta_2}{\gamma_2}$) радиуса $R_2=\frac{2}{\gamma_2}$.

Так как 1-й и 2-й экваторы пересекаются в диаметрильно противоположных точках на сфере, то и их проекции пересекаются на плоскостьиz=-1. На сфере все радиусы экваторов (меридианов) равны , а радиусы проекций $R_1 \neq R_2$ при $\gamma_1 \neq \gamma_2$.

ПРИМИНЕНИЕ В КРИСТАЛЛОГРАФИИ

При построении стереографическое проекции в кристаллографии центр сферы совпадает с плоскостью и кристалл проецируется на круг.





Так как радиус сферы единичный, то координаты на плоскости будут такими же, как и в обычной проекции, но поделённые на 2:

$\frac{x}{2}\frac{y}{2}$.