УДК 519.8

ПРИКЛАДНАЯ МАТЕМАТИКА В ВОЕННОМ ДЕЛЕ

Попкович А. С.
руководитель: Шевелева И. В. к.ф.-м.н., доцент СФУ
МАОУ Лицей №6 "Перспектива"

Введение

Война является ярчайшем проявлением одного из наиболее фундаментальных понятий в человеческой истории – понятия конфликта, т.е. ситуации столкновения интересов разных групп людей. Как следствие, анализ военных действий полезен для изучения наиболее важных закономерностей развития конфликтов, а также для выработки общих правил поведения в конфликтных ситуациях. Именно на основе анализа данных, накопленных в течении двух мировых войн в середине прошлого века были созданы основы такого раздела математики как исследование операций. Таким образом, военное дело стало основой математических методов принятия решений.

Однако позже большее внимание стало уделяться использованию методов исследования операций при решении гражданских задач. Так, большая часть учебных пособий иллюстрирует в основном использование этого раздела математики в экономике и информационных технологиях, в то время как военные вопросы стратегического характера зачастую решаются на основе методов естественных и гуманитарных наук.

В связи с этим, нами была поставлена задача изучить методы современной прикладной математики и применить их для решения вопросов стратегического планирования военных операций.

Законы Ланчестера

Применение математических моделей в военном деле разумно проиллюстрировать исторически первой моделью боя, широко применяющейся до сих пор – дифференциальными уравнениями Ланчестера, отражающими изменение численного состава сторон во время боя.

Линейные законы

$$\alpha(A_0 - A(t)) = \beta(B_0 - B(t))$$

Описывают динамику потерь в ситуации, когда один человек может сражаться только с одним человеком. При этом происходит обычный "размен", при котором слабейшая сторона полностью погибает, а сильнейшая уменьшается на величину, равную силе слабейшей, делённой на превосходство победителя в удельной огневой мощи:

$$\begin{cases} A_f = A_0 - \dfrac{\beta}{\alpha} B_0 \\ B_f = 0 \end{cases}$$

где:

A_f, B_f - силы сторон после сражения

A_0, B_0 - силы сторон в начале сражения,

α,β - коэффициенты боевой мощи сторон

Квадратичный закон

Квадратичные уравнения описывают современный бой. Они основаны на предположении, что ущерб, наносимый за единицу времени каждой из сторон пропорционален силе этой стороны.

$$\begin{cases} dA = -\beta B(t)dt \\ dB = -\alpha A(t)dt \end{cases}$$

где $A(t)$ и $B(t)$ – силы сторон в момент времени t.

Аналитическое решение этой системы таково:

$$\begin{cases} A(t) = A_0 \mathrm{ch}\, t\sqrt{\alpha\beta} - B_0 \sqrt{\dfrac{\alpha}{\beta}}\, \mathrm{sh}\, t\sqrt{\alpha\beta} \\ \\ B(t) = B_0 \mathrm{ch}\, t\sqrt{\alpha\beta} - A_0 \sqrt{\dfrac{\beta}{\alpha}}\, \mathrm{sh}\, t\sqrt{\alpha\beta} \end{cases}$$

соотношение потерь в момент времени t подчиняется уравнению:

$$\beta(A^2(t) - A_0^2) = \alpha(B^2(t) - B_0^2) = (\beta A_0^2 + \alpha B_0^2) sh^2 t\sqrt{\alpha\beta} - \sqrt{\alpha\beta}\, A_0 B_0 \mathrm{sh} 2t\sqrt{\alpha\beta}$$

таким образом, согласно модели Ланчестера бой продолжается вечно, при этом силы слабейшей стороны стремятся к нулю, а сильнейшей к $\frac{\alpha}{\beta}\sqrt{A_0^2 - B_0^2}$. Практически это означает, что чем больше огневая мощь стороны, тем меньшую цену ей придётся заплатить за победу.

Соотношение сил сторон в момент времени t характеризуется величиной $\kappa = \frac{B_0}{A_0}\sqrt{\frac{\alpha}{\beta}}$. Если $\kappa > 1$, то первые сильнее вторых и бой через некоторое время закончится их победой. Если $\kappa < 1$, то наоборот, вторые сильнее первых. Если же $\kappa = 1$, то ни одна из сторон не имеет преимущества.

Пример вычисления коэффициентов боевой мощи и преимущества

Произошло столкновение между двумя воинскими подразделениями численностью 250 и 200 человек соответственно. Средняя скорострельность (с учётом переноса огня) подразделения I равняется 650 выстрелам в минуту, подразделения II - 700 выстрелов в минуту. Вероятность поражения противника бойцом подразделения I - 0.05, подразделения II - 0.06. Победой какой стороны завершится бой?

Определяем коэффициент боевой мощи как эффективную скорострельность каждой стороны:

$k_1 = p_1 * l_1$=0.05*650=32.5;

$k_2 = p_2 * l_2$=0.06*700=42;

Коэффициент боевого преимущества подразделения I будет равен:

$$X = \frac{n_1}{n_2} * \frac{k_1}{k_2} = \frac{250 * 32.5}{200 * 42} = \frac{8125}{8400} \approx 0.96$$

Следовательно, победит группировка II.

Классическая теория игр

Игра – это математическая модель конфликтной ситуации, регламентированная определенными правилами. Мы рассмотрим, прежде всего, так называемые матричные игры, т.е. игры, для которых может быть составлена платёжная матрица.

Платёжной матрицей называется матрица, показывающая платёж (выигрыш) одной стороны другой в случае, если первая сторона выбрала стратегию A_i, а вторая стратегию B_j (при этом проигрыш обозначается как отрицательный выигрыш). Если у игрока A есть m возможных стратегий, а у игрока $B - n$, то игра называется $m{\cdot}n$. Оптимальной стратегией в таких играх является та, что при многократных повторениях обеспечит игроку наибольший выигрыш. При этом стратегия может быть как чистой, так и смешанной, т.е. заключающейся в чередовании чистых стратегий в определённом порядке. Доказано, что любая игра имеет решение либо в чистых, либо в смешанных стратегиях.

Принцип выбора стороной наиболее осторожной стратегии называется "принципом минимакса".

Нижняя цена игры α – это максимальный выигрыш, который можно гарантировать в игре, верхняя цена игры β – это минимальный проигрыш, на который может рассчитывать противник. Если α = β, то решение игры находится в области чистых стратегий, в противном случае в области смешанных.

Пример решения прикладной военной задачи как матричной игры:

Пусть имеются две системы оружия A_1 и A_2 (например, ЗРК), одна из которых эффективна против одного вида целей (например, низколетящих), а вторая против другого (высоколетящих). В результате расчётов эффективности можно составить платёжную матрицу, элементами которой будут вероятности поражения целей комплексами.

	B_1	B_2	min строк
A_1	α_{11}	α_{12}	α_1
A_2	α_{21}	α_{22}	α_2
max столбцов	β_1	β_2	

Выбрав минимум из каждой строки и определив максимум из полученных значений находим нижнюю цену игры $\alpha = max_i\{\ min_j\ a_{ij}\ \}$.

Выбрав максимум из каждого столбца и определив минимум из полученных значений находим верхнюю цену игры $\beta = min_j\{\ max_i\ \beta_{ij}\ \}$.

Если они совпадают, то пересечение соответствующих строки и столбца является "седловой точкой", т.е. решением игры. Данная точка указывает на ситуацию, которая возникнет при оптимальном поведении обоих игроков, так как отклонятся от неё в одностороннем порядке невыгодно не одному из них. Если же $\alpha \neq \beta$ то игра имеет решение лишь в области смешанных стратегий, т.е. чистые стратегии необходимо чередовать с определённой частотой.

При этом для биматричной игры существует аналитическое решение:

$$\begin{cases} P_1 = \dfrac{a_{22} - a_{21}}{a_{11} + a_{22} - (a_{12} + a_{21})} \\ P_2 = 1 - P_1 \end{cases}$$

Т.е. если в результате расчётов была получена следующая платёжная матрица:

	B_1	B_2
A_1	0,4	0,2
A_2	0,2	0,6

То оптимальная смешанной стратегия игрока А задаётся следующими значениями вероятностей:

$$\begin{cases} P_1 = \dfrac{a_{22} - a_{21}}{a_{11} + a_{22} - (a_{12} + a_{21})} = \dfrac{0{,}6 - 0{,}2}{0{,}4 + 0{,}6 - (0{,}2 + 0{,}2)} = \dfrac{0{,}4}{0{,}6} = \dfrac{2}{3} \\ P_2 = 1 - P_1 = 1 - \dfrac{2}{3} = \dfrac{1}{3} \end{cases}$$

Т.е. необходимо разместить комплексы первого и второго видов в соотношении 2:1

Представленный выше пример иллюстрирует игру в один ход, т.е. принятие одиночного решения. При формализации многоходовых игр они могут быть представлены в виде "дерева" (графа без циклов) или матрицы существенно большей размерности, однако в конечном итоге их решение сводится к аналогичным действиям.

Элементы теории массового обслуживания

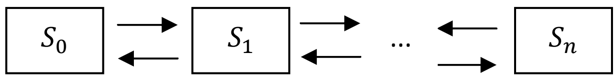
A - абсолютная пропускная способность, т.е. среднее число заявок, обслуживаемых в единицу времени.

Q - относительная пропускная способность, т.е. среднюю долю пришедших заявок, обслуживаемых системой.

$P_{отк.}$ - вероятность отказа.

$\bar{k}$ - среднее число занятых каналов.

Для описания многоканальной СМО обычно составляется граф её состояний, в котором элемент под номером k описывает состояние системы, при котором она обслуживает k заявок (т.е. занято k каналов)



Пусть интенсивность потока заявок равна λ, а потока обслуживания каждого канала μ. Тогда вероятность перехода системы из состояния k в состояние k+1 равна λ, а в состояние k-1 − kμ. При этом величина

$\rho = \frac{\lambda}{\mu}$

будет называться приведенной интенсивностью потока заявок, или интенсивностью загрузки канала. Она выражает число заявок, приходящих за время обслуживания одной заявки. Теперь предельная вероятность перехода системы в состояние k выражается *формулами Эрланга*:

$$p_0 = \left(1 + \rho + \frac{\rho^2}{2!} + \cdots + \frac{\rho^n}{n!}\right)^{-1}$$

$$p_k = \frac{\rho^k}{k!} p_0$$

а значит вероятность того, что заявка останется необслуженной равна:

$$P_{отк.} = \frac{\rho^n}{n!} p_0$$

вероятность того, что заявка будет обслужена:

$$Q = 1 - P_{отк.}$$

среднее число заявок, обслуживаемых за единицу времени:

$$A = \lambda Q$$

Пример использования теории СМО в военном деле

Рассмотрим в качестве СМО с отказами систему ПВО, "обслуживающую" самолёты противника.

Задача: Определить оптимальное число ЗРК в системе ПВО, если за время, необходимое для поражения одного самолёта противника одним ЗРК в зоне действия ПВО появляется в среднем 3 новых самолёта, а критерием оптимальности является уничтожение не менее 90% самолётов противника.

Решение:

$\rho = \frac{\lambda}{\mu} = 3\ (по\ усл.);$

Постепенно увеличивая число каналов (ЗРК) определяем по представленным выше формулам относительную пропускную способность системы, пока она не станет ≥0.9.

	n=1	n=2	n=3	n=4	n=5
Q	0.25	0.47	0.65	0.79	0.9

Таким образом, потребуется пять комплексов ЗРК.

Заключение.

Изучены основные разделы современной прикладной математики.

Методы некоторых из них применены к решению задач, возникающих при планировании боевых действий.

Решения получены как в общем виде, так и для конкретных исходных данных.

В перспективе планируется рассмотреть применение в военном деле методов сетевого планирования и математического программирования.

Список литературы.

1. Теория игр/ Конюховский П.В., Малова А.С.: Учебное пособие. − М. :Издательство Юрайт, 2013.
2. Исследование операций в экономике/Кремер Н.Ш., : Учебное пособие − М. : Издательство Юрайт, 2010.
3. Основы и применение методов прикладной математики в военном деле : Учебник / П. И. Иванов, А. Ю. Жиров, Е. В. Вышкварок. - Москва : МОНИНО, 1991.
4. Исследование операций и алгоритмизация боевых действий/ Мильграм Ю.Г. − типография ВВИА имени Жуковского, 1967
5. Исследование операций: задачи, принципы, методология. / Вентцель Е.С. — М.: Наука, Главная редакция физико-математической литературы, 1980