УДК 51

ПЕРВЫЕ ШАГИ НА ПУТИ К ОЛИМПУ

Соколова В.В., Мандров Г.
научные руководители учитель математики старших классов Новикова О.В., учитель информатика старших классов Мясникова И.С.
Муниципальное общеобразовательное учреждение Лицей № 28

Введение.

В этом году произошла отмена медалей и теперь при поступлении в ВУЗ помимо ЕГЭ важным фактором становятся личные достижения учащихся в школьные годы. Поэтому все больше школьников стремятся участвовать в различных состязаниях, в том числе в олимпиадах.

Меня участие в олимпиаде тоже не обошло стороной. Я выполняла задания по математике. Решая их, я задумалась о том, можно ли решить все задачи одним-двумя методами или необходимо применять различные методы для достижения наилучшего результата?

Основная часть.

В связи с этим мы провели исследование среди старшеклассников лицея № 28, постоянно принимающих участие в олимпиадах по математике, чтобы увидеть разнообразие применения различных математических методов при решении ими различных задач.

Результаты исследования показали, что в действительности большинство школьников используют для решения этих задач один-два способа: чаще всего это метод «от противного» и «четность». Данное обстоятельство значительно снижает процент решаемости задач.

Поэтому мы решили составить мини-пособие в помощь учащимся и учителям, в котором рассмотрела семь методов решения олимпиадных задач по математике вместе с примерами их применения.

Рассмотрим каждый метод по отдельности.

1. Поиск родственных задач.

Решите уравнение:

$(x^2 + x - 3)^2 + 2x^2 + 2x - 5 = 0$

А как пользоваться поиском родственных задач? Нужно всего лишь выполнить три пункта:

1. Рассмотреть частный более простой случай, а затем обобщить идею решения.

2. Разбить задачу на подзадачи.

3. Свести задачу к более простой.

Рассмотрим решение:

$(x^2 + x - 3)^2 + 2x^2 + 2x - 5 = 0$

Видим, что можно использовать метод замены, но сначала нужно определиться с выражением, которое будем заменять. Можно увидеть, что с помощью некоторых преобразований, можем заменить выражение $x^2 + x - 3$.

Прибавим и отнимем единицу, чтобы равенство не изменилось:

$(x^2 + x - 3)^2 + 2x^2 + 2x - 5 - 1+1 = 0$

$(x^2 + x - 3)^2 + 2x^2 + 2x - 6+1 = 0$

Теперь вынесем 2 как общий множитель, получаем равенство:

$(x^2 + x - 3)^2 + 2(x^2 + x -3)+1 = 0$. Вводим новую переменную: $t= x^2 + x - 3$, тогда уравнение примет вид $t^2 + 2t+ 1 = 0$. Видим, что это левая часть равенства является формулой сокращенного умножения, которая равна $t^2 + 2t+ 1 = (t+1)^2$, тогда приравняем квадрат суммы к нулю: $(t+1)^2 = 0$. Квадрат суммы равен нулю, когда сумма равна нулю, тогда $t+1=0$, получаем $t= -1$.

Теперь подставляем значение t и получаем уравнение: $x^2 + x - 3 = -1$

$x^2 + x - 2 = 0$, находим дискриминант по формуле $D = b^2 - 4ac$, получаем $D = 9 > 0$ – 2 различных действительных корня. Теперь находим корни уравнения по формуле: $x_{1,2} = (- b \pm \sqrt{D}) : 2a$, получаем $x_1=1$; $x_2=-2$.

Ответ : 1, -2

2. Доказательство от противного.

Задача.

Среди любых десяти из шестидесяти ребят найдутся трое одноклассников. Докажите, что среди всех них найдутся 15 одноклассников.

Каждый школьник знает доказательство от противного.

Рассуждают примерно так : «Допустим, исходное утверждение неверно. Если из этого получим противоречие, то исходное утверждение верно.»

Теперь можем решить эту задачу:

Разделим ребят на группы одноклассников. Предположим, что в каждой группе не более 14 ребят. Тогда в четырех самых больших по количеству группах не более $4\cdot 14 = 56$ ребят. Если в каждой из этих групп не менее двух человек, то можно взять по два школьника из этих четырех групп и добавить двух школьников из оставшихся (их не менее 60-56=4). **Среди этих 10 школьников нет трех одноклассников, что противоречит условию.** Если хотя бы в одной из этих четырех групп меньше двух человек, то имеется не менее $60 - 3\cdot 14 = 18$ школьников, которые учатся в разных классах. **Это также противоречит условию.**

3. Четность.

Задача.

У марсиан бывает произвольное число рук. Однажды все марсиане взялись за руки так, что свободных рук не осталось. Докажите, что число марсиан, у которых нечётное число рук, чётно.

Многие задачи легко решаются, если заметить, что некоторая величина имеет определенную четность. Из этого следует, что ситуации, в которых эта величина имеет другую четность, невозможны. Иногда эту величину надо сконструировать, например, рассмотреть четность суммы или произведения, разбить объекты на пары, заметить чередование состояний, раскрасить объекты в два цвета.

Решение.

Назовём марсиан с чётным числом рук чётными, а с нечётным – нечётными. Поскольку руки образуют пары, то общее число рук чётно. Общее число рук у чётных марсиан чётно, поэтому общее число рук у нечётных марсиан тоже чётно. **Следовательно, число марсиан, с нечетным количеством числом рук, чётно.**

4. Обратный ход.

Задача.

На озере расцвела одна лилия. Каждый день число цветков удваивалось, и на двадцатый день всё озеро покрылось цветами. На который день покрылась цветами половина озера?

Если в задаче задана некоторая операция, и эта операция необратима, то можно сделать «обратный ход» от конечного результата к исходным данным. Анализ с конца используется в играх при поиске выигрышных и проигрышных ситуаций.

Теперь, зная немного об обратном ходе, можно решить задачу:

Начнем с конца. Пусть сегодня половина озера покрылась цветами. Через сколько дней покроется всё озеро? Завтра! Т.к. с каждым днем число цветков удваивалось. И это будет 20-й день.

Ответ: за 19 дней.

5. Подсчет двумя способами.

Задача.

Найдите сумму геометрической прогрессии

$S_n = 1 + 3 + 9 + ... + 3^n$.

При составлении уравнений выражают некоторую величину двумя способами. Иногда некоторую величину оценивают двумя способами, тогда получают или неравенство, или величины разной четности. Эта идея тесно связана с идеей инварианта. Она бывает источником противоречия.

Мы можем решить задачу:

Заметим, что зная S_n, можно получить следующую сумму S_{n+1} двумя способами: либо добавить 3^n, т.е. получаем $S_{n+1} = S_n + 3^n$, либо умножить все слагаемые на 3, а потом прибавить 1, т.е. получаем $S_{n+1} = 3 \cdot S_n + 1$, получается, что приравняв друг другу $S_n + 3^n$ и $3 \cdot S_n + 1$, получаем уравнение: $S_n + 3^n = 3 \cdot S_n + 1$. Отсюда получаем, что $S_n = (3^n - 1):2$.

6. Инвариант.

Задача.

На 44 деревьях, расположенных по кругу, сидели по одному веселому чижу. Время от времени какие-то два чижа перелетают один по часовой стрелке, а другой – против, каждый – на соседнее дерево. Могут ли все чижи собраться на одном дереве?

Что такое инвариант? Инвариант – величина, которая не изменяется в результате некоторых операций (например, разрезание и перестановка частей фигур не меняет суммарной площади). Если инвариант различает два положения, то от одного нельзя перейти к другому.

Попробуем решить задачу:

Пронумеруем деревья по кругу от 1 до 44. Сумма номеров деревьев, на которых сидят чижи, либо не меняется, либо уменьшается на 44, либо увеличивается на 44. Тем самым, остаток от деления этой суммы номеров на 44 не меняется. Изначально этот остаток равен 22, а если все чижи усядутся на одно дерево, то он будет равен нулю. **Поэтому чижи не смогут собраться на одном дереве.**

7. Принцип Дирихле.

Задача.

На собеседование пришли 65 школьников. Им предложили 3 контрольные работы. За каждую контрольную ставилась одна из оценок: 2, 3, 4 или 5. Верно ли, что найдутся два школьника, получившие одинаковые оценки на всех контрольных?

А как звучит сам принцип? В простейшем виде его выражают так: «Если десять кроликов сидят в девяти ящиках, то в некотором ящике сидят не меньше двух.».

Общая формулировка: «Если n кроликов сидят в k ящиках, то найдётся ящик, в котором сидят не меньше чем n/k кроликов, и найдётся ящик, в котором сидят не больше чем n/k кроликов».

Пусть вас не смущает дробное число кроликов – в предыдущем случае получается, что в ящике не меньше 10/9 кроликов, значит, не меньше двух.

А сейчас мы сможем решить задачу:

Рассмотрим множество наборов из трёх оценок за соответствующие контрольные. Количество таких наборов равно 4^3 или 64 (4 возможности за каждую из трёх контрольных). Тогда наборы это «клетки», а школьники – «кролики», тогда

Воспользовавшись принципом Дирихле можем сказать, что «Если 65 кроликов (ученики) сидят в 64 ящиках(наборов оценок), то найдется ящик, в котором сидят не меньше чем 65/64 кроликов, и найдется ящик, в котором сидят не больше чем 65/64 кроликов», то каким-то двум участникам соответствует один набор оценок.

Список литературы:

1. Как решают нестандартные задачи / Под ред. В. О.Бугаенко. – 4-е изд., стереотип.|М.: МЦНМО, 2008. – 96 с.

2. Московские математические олимпиады: Кн. для учащихся / Под ред. А.Н. Колмогорова. – М.: Посвещение, 1986. – 303с., ил.

3. Математические кружки в 8 – 10 классах: Кн. для учителя. – М.: Просвещение, 1987. – 224 с.,: ил.

4. Ленинградские математические кружки: пособие для внеклассной работы. Киров, издательство «АСА», 1994. – 272 с.

5. Сборник конкурсных задач по математике для поступающих во втузы. Учебн. Пособие./ [Под ред. М.И. Сканави]. – 3-е изд., доп.. – М.: Высш. Школа, 1978. – 519 с., ил.

6. Фаддеев Д. К., Никулин М. С., Соколовский И. Ф. Элементы высшей математики для школьников. – М.: Наука, Главная редакция физико-математической литературы, 1987. - 336 с.

7. Алгебра и начала анализа. 10 класс. В 2 ч. Ч. 1. Учебник для общеобразовательных учреждений(профильный уровень) / А. Г. Мордкович, П. В. Семенов. – 4-е изд., доп. - М.: Мнемозина, 2007. – 424 с., : ил.

8. Алгебра и начала анализа. 11 класс. В 2 ч. Ч. 1. Учебник для общеобразовательных учреждений(профильный уровень) / А. Г. Мордкович, П. В. Семенов. – 4-е изд., доп. - М.: Мнемозина, 2007. – 287 с., : ил.