УДК 51

СОЗДАНИЕ ВЫПУКЛЫХ СОСТАВНЫХ И НЕСОСТАВНЫХ ПРАВИЛЬНОГРАННИКОВ

Ерещенко Мария Алексеевна
Научный руководитель Волошинская Елена Леонидовна
МАОУ «Общеобразовательное учреждение лицей №7»

Введение

«Современных ученых не слишком увлекает геометрия, они не считают этот предмет особо притягательным. Поэтому многогранники так и остаются неизученными…» - Каковкина Н.В.[6].

На сегодняшний день многогранники являются наименее изученной областью геометрии, что подтверждает геометр, профессор математики Каковкина Н.В. Полиэдры являются неотъемлемой частью геометрии. На сегодняшний день известны немногочисленные свойства многогранников, к 2011 году в работах научного руководителя и его партнеров найдено всего 186 выпуклых правильногранников без фиктивных вершин и ребер. В данной работе я допускаю наличие в многограннике фиктивных ребер, но условие правильных граней и выпуклости остается неизменным.

Цель работы: получить новые выпуклые многогранники способом рассечения по ребрам и добавления вставок в разрезы по ребрам, соединения по граням.

Задачи:

- Изучить работы о многогранниках Тимофеенко А.В., Ю.Залгаллера, Ю.П.Матиясевича, и др.;
- Найти оптимальный способ для построения многогранников;
- Выбрать способы получения новых многогранников.

Многогранники были собраны из конструктора Фреда Бассети. В работе рассматривались только выпуклые правильногранники.

Сначала я соединяла многогранники Q_6, Q_{6a}, Q_{6b}, M_2 и M_4 по ребрам и получила около 50 неописанных тел, причем 25 из них оказались выпуклыми. Наибольшее выпуклое составное тело, полученное из данных многогранников, является восьмисоставным.

Далее я добавляла вставки в разрезы по ребрам различных многогранников. В ходе работы были также найдены до этого никем не описанные тела. Но помимо этого были доказаны теоремы о том, что:

- Не в каждый выпуклый правильногранник можно сделать вставку из правильных многоугольников при этом сохраняя его выпуклость;
- Существуют правильногранники при рассечении которых и добавлении между полученными частями еще одной многогранной поверхности, получаем поверхность нового повторяющегося правильногранника.

В ходе работы были найдены новые выпуклые правильногранники, а также выведены и доказаны теоремы о них.

Глава I.
Понятие многогранника

Многоугольник - это геометрическая фигура, обычно определяется как замкнутая ломаная, имеющая больше двух углов.

Многогранник (полиэдр) - часть пространства, ограниченная совокупностью конечного числа плоских многоугольников, соединенных таким образом, что каждая сторона любого многоугольника является стороной ровно одного другого многоугольника (называемого смежным), причем, вокруг каждой вершины существует ровно один цикл многоугольников. Эти многоугольники называются гранями, их стороны – ребрами, а вершины – вершинами многогранника.

Многогранник называется выпуклым, если он весь расположен по одну сторону от плоскости каждой из его граней, либо, если выполнено одно из следующих условий:

- он лежит по одну сторону от любой прямой, соединяющей его соседние вершины (то есть продолжения сторон многоугольника не пересекают других его сторон);
- он является пересечением (то есть общей частью) нескольких полуплоскостей;
- каждая диагональ лежит внутри многоугольника;
- любой отрезок с концами в точках, принадлежащих многоугольнику, целиком ему принадлежит.

Многоугольник называется правильным, если у него все стороны равны и все углы равны.

Правильногранником называется такой многогранник, что каждая его грань составлена из одного или нескольких правильных многоугольников. Причем, во-первых, общая вершина не лежит внутри ребра одного из них, во-вторых, сумма углов многоугольников в каждой общей вершине меньше 180°, [4]. Совокупность эскизов построенных многогранников представлена в атласе многогранников, [1].

Разрез многогранника по ребрам – замкнутая ломаная линия, проходящая по ребрам многогранника и разделяющая на две части многогранник плоскостью.

Выпуклые многогранники были собраны по технологии, предложенной в статье Ю. Матиясевича в научно-популярном журнале «Квант», [5]. Сборка правильных многогранников не вызвала затруднений. Сначала были изготовлены правильные многоугольники – грани многогранников, затем соединены в одно тело при помощи канцелярских резинок.

Рассматриваются только выпуклые многогранники, каждая грань которых либо правильный, либо составленный из правильных многоугольников с единичными ребрами многоугольник. Вершины и ребра этих многоугольников разделены на истинные и фиктивные. *Фиктивное ребро* соединяет расположенные в одной грани правильные многоугольники, а *фиктивная вершин*а лежит внутри грани или внутри ребра.

К 2011 году в работах научного руководителя, и его партнёров в европейских и североамериканских университетах, найдены все выпуклые правильногранники без условных вершин. Другими словами, доказана теорема о том, что кроме призм и антипризм существует ровно 186 выпуклых правильногранников без фиктивных вершин, из которых 78 обладают фиктивными рёбрами, причем каждый из них построен в виде компьютерной модели, но ни одна из моделей не была материализована.

С помощью конструктора, изобретенного Фредом Бассети, были созданы материализованные модели правильногранников и с помощью различных рассечений по ребрам и соединений по плоскостям были получены новые, никем до этого не описанные многогранники и доказаны поставленные теоремы.

В результате знакомства с работами Залгаллера и Тупелло, атласом многогранников, представилась возможность индивидуализировать различные разрезы по ребрам в каждом правильногранники и получить выпуклые тела путем моделирования.

Моделирование новых выпуклых тел выполнялось двумя способами:

- путем рассечения многогранников по ребрам и добавления вставок из правильных многоугольников.
- путем соединения по плоскостям имеющихся выпуклых тел.

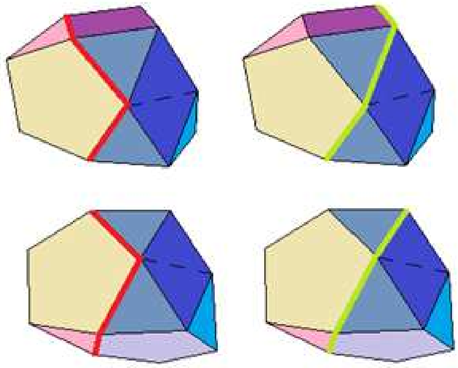
Глава II. Практическая часть

Часть 1

Утверждение: *В любой выпуклый правильногранник можно сделать вставку из правильных многоугольников, при этом сохраняя его выпуклость.*

Из атласа многогранников, [1], был выбран произвольный многогранник – Q_3. В данном многограннике рассматривались возможные разрезы по ребрам. Всего их оказалось два.

В разрезы по ребрам были сделаны вставки. Но со вставкой полиэдр становился невыпуклым.


Разрезы по ребрам, Q3

Другими словами, было доказано утверждение о том, что «Не в каждый выпуклый многогранник можно сделать вставку из правильных многоугольников, при этом сохраняя его выпуклость».

Помимо этого было замечено интересное свойство: при добавлении в *разные* разрезы по ребрам *неодинаковых* вставок, получалось одно и то же тело. То есть, многогранник является *повторяющимся*.

Из полученных результатов идет следующее предположение.

Часть 2

Утверждение: *Существуют **выпуклые** правильногранники, каждый из которых рассечен по рёбрам так, что при присоединении двух полученных частей и еще одной многогранной поверхности, составленной из правильных многоугольников, получаем поверхность нового повторяющегося многогранника.*

На первом этапе рассматривался весь набор правильногранников, представленных в атласе многогранников, [1]. Из них были выбраны лишь те многогранники, которые имеют два или более пересекающихся разреза по ребрам, без учета разреза по внутренним плоскостям тела, [4].

На втором этапе были выбраны многогранники Q3 , Q4 , P2,29 , P3,36 , P2,34  и P3,40, имеющие два и более разреза по ребрам.

На третьем этапе были сделаны вставки, и проводился анализ многогранников на выпуклость.

В многограннике Q_3 есть два пересекающихся разреза по ребрам и две различных вставки из правильных многоугольников, превращающие многогранник путем поочередного добавления разных вставок в различные разрезы по ребрам в новое повторяющееся тело. Эти факты известны из работы [2], поэтому представляется возможным проверить тело на выпуклость.

При добавлении вставки в один из разрезов многогранника по ребрам, был получен новый, но невыпуклый многогранник. Так как вставки отвечают условиям утверждения, то соответственно и со второй вставкой многогранник будет выпуклым.

Далее рассматривался многогранник Q_4. Многогранник Q_4 можно получить из многогранника Q_3 путем отсечения и поворота одной из частей многогранника на 180^o.

В многограннике Q_4 имеем те же пересекающиеся разрезы, что и в многограннике Q_3. А это значит, можно использовать те же вставки, что и в многограннике Q_3. Но в этом случае было получено новое выпуклое тело.

В многограннике $P_{2,29}$ пересекающиеся разрезы по ребрам те же, что и в многогранниках, рассматриваемых ранее. Значит, можем использовать и те же вставки. При добавлении одной из вставок в многогранник получили новое выпуклое тело.

При рассмотрении многогранника $P_{3,36}$ также было отмечено, что его разрезы по ребрам аналогичны тем, что рассматривались в предыдущих многогранниках. Используя те же вставки, была проверена выпуклость многогранника со вставкой, многогранник остался выпуклым.

Правильногранник $P_{2,34}$ имеет сходные с многогранниками Q_3, Q_4, $P_{2,29}$, $P_{3,36}$ разрезы по ребрам, то есть может принимать те же вставки из правильных многоугольников. При добавлении вставок получаем выпуклое тело.

В многограннике $P_{3,40}$ разрезы по ребрам отличаются от тех, что рассматривались в многогранниках Q_3, Q_4, $P_{2,29}$, $P_{3,36}$. Не смотря на то, что многогранник имеет множество разрезов по ребрам, различные вставки, превращающие многогранник в повторяющееся тело, отсутствуют. Но при добавлении одной и той же вставки в различные разрезы по ребрам, получаем новый выпуклый многогранник.

Таким образом, найден целый ряд многогранников {Q_4, $P_{2,29}$, $P_{3,36}$, $P_{2,34}$}, подтверждающих утверждение, поставленное в начале опыта, полученный в результате рассечения по ребрам и добавления вставок. Каждый многогранник переходит в новое повторяющееся тело. **Полученные полиэдры до этого не были описаны.**

Часть 3

Утверждение: *Существуют бесконечное выпуклое соединение каждого из тел Q_6, Q_{6a}, Q_{6b}, M_4 и M_2 между собой.*

Рассматривались многогранники Q_6, Q_{6a}, Q_{6b}, M_4 и M_2, предложенные для изучения научным руководителем Тимофеенко А.В., [3]. Было необходимо выяснить, каковы все выпуклые соединения каждого из тел Q_6, Q_{6a}, Q_{6b} с M_4 и M_2, причем длины ребер соединений </= 2, а длины ребер слагаемых едины.

При рассмотрении следующих соединений многогранников по граням проводилась проверка новых тел на выпуклость.

Получены следующие результаты для двух – восьмисоставных соединений многогранников. Определена их выпуклость.

Но максимально правильногранник может состоять из восьми данных полиэдров.

Таким образом, практическим путем найден конечный ряд составных полиэдров, состоящих из данных многогранников, полученных в результате соединения по плоскостям, а также было проведено опровержение поставленному утверждению.

Заключение

Таким образом, в ходе работы были созданы ранее неизвестные выпуклые многогранники с правильными гранями, полученные в результате моделирования новых выпуклых тел способом рассечения многогранников по ребрам и добавления вставок из правильных многоугольников, а также способом соединения по плоскостям имеющихся выпуклых тел; поставлены и доказаны теоремы о многогранниках.