УДК 004

СОЗДАНИЕ КАЛЬКУЛЯТОРА МАТРИЦ В ОБЪЕКТНО-ОРИЕНТИРОВАННОЙ СРЕДЕ ПРОГРАММИРОВАНИЯ

Корнеев Никита Сергеевич
Научный руководитель Волошинская Елена Леонидовна
МАОУ «Общеобразовательное учреждение лицей №7»

ВВЕДЕНИЕ

Для многих операций в офисах, лабораториях и прочих рабочих местах, связанных с какими-либо расчетами, требуются различные вычисления с нестандартными типами данных. Примером таких данных являются матрицы (например, в экономике). Для быстрого выполнения всех этих операции очень удобно использовать компьютер, если в нем есть пригодная для конкретной задачи программа.

Мне стало интересно, как проводятся операции с матрицами, и возможно ли разработать программу, которая могла бы выполнять данные операции автоматически. Практически на любом современном компьютере сейчас установлена программа Excel из популярного пакета Microsoft Office. В этой программе можно выполнять все основные и дополнительные операции над матрицами без использования специальных программ. Но для выполнения всех этих операции необходимо иметь довольно обширную математическую базу и немалые навыки работы в Excel. Это и составляет основную проблему, решаемую в данной работе.

Изучив представленные в интернете калькуляторы матриц, например [3], [4], идея была найдена и наполнена содержанием. Представленный на рис.1 калькулятор матриц [4], как и многие другие, малофункционален (хотя и продается в интернете за деньги).

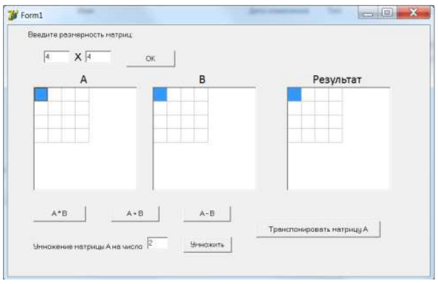

Рис.1.

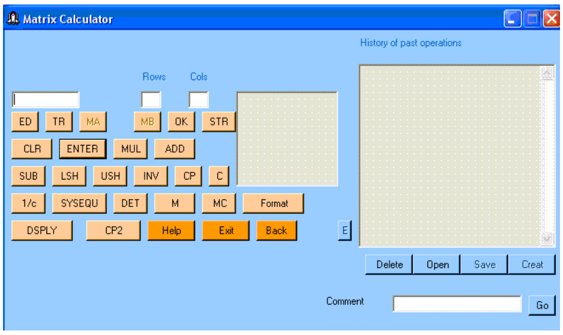

Рис.2.

Существует другая группа функциональных калькуляторов матриц со сложным интерфейсом [5] (рис. 2).

Но все существующие калькуляторы матриц, которые можно легально скачать из интернета – платные.

Значит, предполагаемый «продукт» должен обладать рядом качеств, которые бы выделили бы его среди остальных программ с той же функцией.

Во-первых, функциональность, то есть программа должна включать основной и дополнительный набор операций с матрицами.

Во-вторых, простота интерфейса, рассчитанного практически на любого пользователя, имеющего хотя бы первоначальное понятие о матрицах.

В-третьих, удобство в использовании программы.

ОСНОВНАЯ ЧАСТЬ

Цель научной работы: заполнение пробелов в знаниях и умениях проведения операций с квадратными матрицами, моделирование данных операций при помощи современных компьютерных средств.

Задачи, поставленные для достижения данных целей:

1. проанализировать источники информации по данной теме;
2. написать программу для проведения математических операций с квадратными матрицами.

В работе использовались такие **методы** исследований, как теоретический анализ и изучение литературы, а также математическое моделирование, прикладные методы программирования. Основные **результаты** научного исследования (научные, практические): разработана программа (компьютерная модель) в объектно-ориентированной среде программирования Delphi для вычисления операций с матрицами.

ГЛАВА I. ОПЕРАЦИИ НАД МАТРИЦАМИ

Определение 1. **Матрицей** называется прямоугольная таблица:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11}\ a_{12}\ \dots\ a_{1n} \\ a_{21}\ a_{22}\ \dots a_{2n} \\ \dots\ \dots\ \dots\ \dots \\ a_{m1}\ a_{m2} \dots a_{mn} \end{pmatrix} = (a_{ij})$$

Число m ее строк и число n ее столбцов называют размерами матрицы A. Про матрицу A говорят, что она размеров $m\times n$. Обозначим $M_{m\times n}$ множество матриц размеров $m\times n$ (m строк и n столбцов).

Определение 2. Пусть $A=(a_{ij})$ и $B=(b_{ij})$ – две матрицы размеров $m\times n$.

Суммой матриц A и B называется матрица $C=(c_{ij})$ є $M_{m\times n}$, такая, что $c_{ij} = a_{ij}+b_{ij}$ для всех i и j.

$$C=A+B=\begin{pmatrix} (a_{11}+b_{11}) & (a_{12}+b_{12}) & \dots & (a_{1n}+b_{1n}) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ (a_{m1}+b_{m1}) & (a_{m2}+b_{m2}) & \dots & (a_{mn}+b_{mn}) \end{pmatrix}$$

Произведением матрицы A на число α называется матрица αA с элементами (αa_{ij}).

$$\alpha A=\begin{pmatrix} \alpha a_{11} & \alpha a_{12} & \alpha a_{1n} \\ \alpha a_{21} & \alpha a_{22} & \alpha a_{2n} \\ \dots & \dots\ \dots & \dots \\ \alpha a_{m1} & \alpha a_{m2} & \alpha a_{mn} \end{pmatrix}$$

Операции сложения матриц и умножения матрицы на число называют линейными операциями.

<u>Пример 1.</u> $\begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 7 & 5 & 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 3 & 7 & -1 \\ 0 & 2 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & 10 & 0 \\ 7 & 7 & 6 \end{pmatrix}$

<u>Пример 2.</u> $3\begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 2 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 12 \\ 6 & 6 \\ 0 & -3 \end{pmatrix}$

Разность матриц A – B можно определить равенством

$$A - B = A + (-1)B.$$

Определение 3. Пусть $A = (a_{ij}) \in Mm\times n$ и $B = (b_{ij}) \in Mn\times k$. Произведением матрицы A и матрицы B называется матрица $C = AB = (c_{ij}) \in Mm\times k$, такая, что

$c_{ij} = a_{i1}b_{1j} + a_{i2}b_{2j} + \ldots + a_{in}b_{nj}$.

Примечание. Произведение AB определено, если число столбцов матрицы A равно числу строк матрицы B.

<u>*Пример 3*</u>.

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 & 2 \\ 3 & 2 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 2 \\ 1 & 0 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (1\bullet1+3\bullet2+1\bullet1+2\bullet1)(3+6+0-2) \\ (3\bullet1+2\bullet2+0\bullet1-1\bullet1)(9+4+0+1) \\ (0\bullet1+1\bullet2+1\bullet1+2\bullet1)(0+2+0-2) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10 & 7 \\ 6 & 14 \\ 5 & 0 \end{pmatrix}$$

Матрица называется квадратной, если число ее строк равно числу столбцов. «Матрица размера n x n называется квадратной матрицей порядка n» [1, С. 157].

Обратная матрица A-1 должна обладать свойством A-1A = E, где E – единичная матрица.

Проверим, что для матрицы

$A = \begin{pmatrix} 1 & 0{,}2 \\ 1 & -0{,}1 \end{pmatrix}$ обратной будет матрица $A\text{-}1 = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & \frac{2}{3} \\ \frac{10}{3} & \frac{-10}{3} \end{pmatrix} = 1/3 \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 10 & -10 \end{pmatrix}$

Умножим слева на A-1 обе части матричного уравнения AX = E и получим равенство

A-1AX = A-1B.

Но так как A-1A =E, а EX = X , то мы приходим к равенству

X = A-1B.

Определение 5. Квадратная матрица $B \in Mn\times n$ называется обратной для матрицы $A \in Mn\times n$, если AB = BA = E (E – единичная матрица). Обратную матрицу для матрицы A обозначают A-1(B = A-1).

<u>Алгоритм нахождения обратной матрицы</u>:

1. Приписать справа к матрице A единичную матрицу соответствующих размеров (A | E).

2. Элементарными преобразованиями строк матрицу (A | E) преобразовать к виду (E | B).

3. Получившаяся в правой половине матрица B и будет обратной матрицей для A: B = A-1.

Если элементы строк матрицы A — $\| a_{ik} \|$ расставлены в столбцы (при этом одновременно элементы столбцов расставляются в строки), то полученная матрица называется <u>транспонированной</u> к A и обозначается $A^T = \| a_{ik}^T \|$, если $a_{ik}^T = a_{ki}$ [1, С. 157].

ГЛАВА II. ПРАКТИЧЕСКАЯ ЧАСТЬ

Программа «Калькулятор матриц», написанная в среде объектно-ориентрованного программирования Delphi 7, выполняющая математические операции над матрицами, представлена в приложении к работе.

Возможности разработанной программы:

- ✓ выбор размера квадратной матрицы от 2x2 до 7x7;

- ✓ очистка матриц-операндов A, B и матрицы результата C;
- ✓ очистка всех матриц A, B, C одновременно;
- ✓ обмен значений между матрицами A, B, C;
- ✓ заполнение случайными числами матриц-операндов A и B;
- ✓ ручное редактирование всех элементов матриц A и B;
- ✓ сложение, вычитание, деление и умножение матриц A и B;
- ✓ умножение матрицы A на число N;
- ✓ нахождение обратной матрицы к A;
- ✓ транспонирование матрицы A;
- ✓ нахождение детерминанта матрицы A.

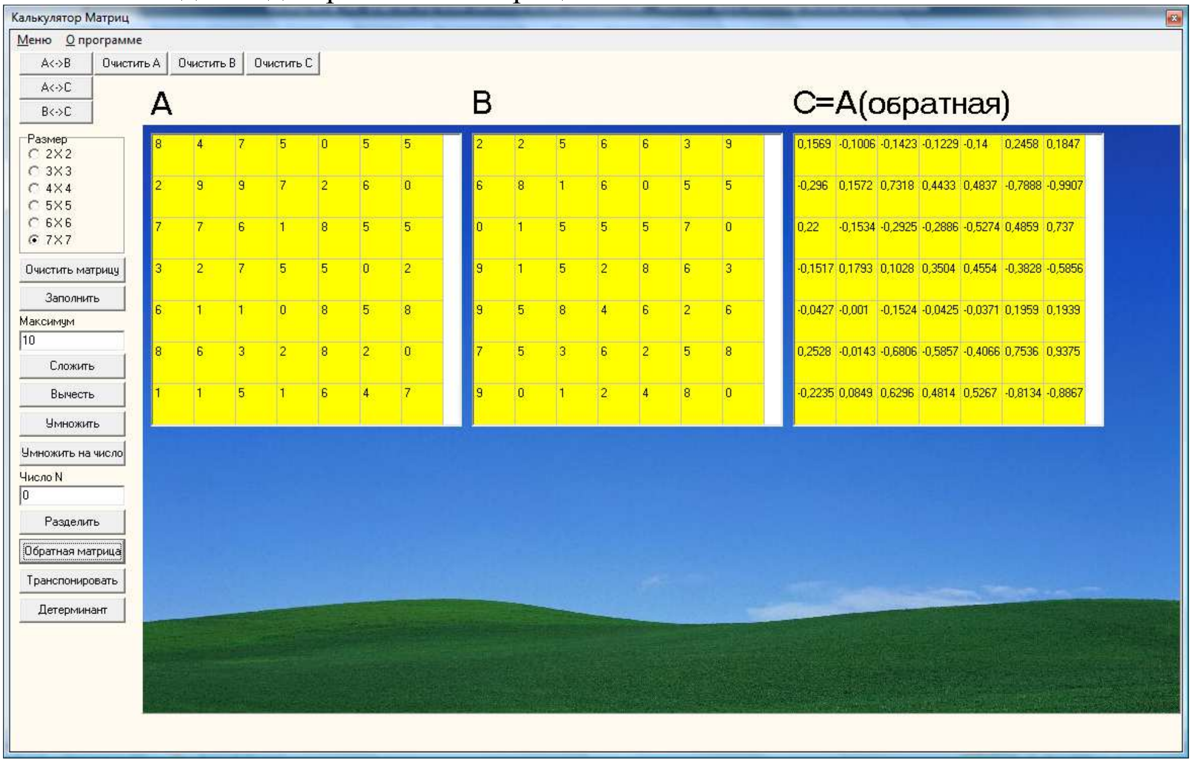

Рис.3.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В работе сформулированы основные математические операции над матрицами.

Разработана программа (компьютерная модель) в объектно-ориентированной среде программирования Delphi для вычисления операций с квадратными матрицами (выбранного размера). Калькулятор позволяет - наряду со стандартными вычислениями (сложение, вычитание и умножение матриц) - находить обратную матрицу, вычислять детерминант матрицы и транспонировать матрицу.

Главными ограничителями являются размеры вычислительного средства, стремление к достижению его компактности.

Размер файла калькулятора составляет примерно 673 Kb. Инсталляция не требуется.

В дальнейшем можно рассмотреть операции с матрицами различного порядка.

Разработанную программу можно применять на факультативе в 10-11 классах в качестве учебно-методического комплекса в сопровождении с цифровым образовательным ресурсом при углубленном изучении данной темы.