УДКК 51

О СУММИРОВАНИИ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТИ СТЕПЕНЕЙ НАТУРАЛЬНЫХ ЧИСЕЛ.

Одегов Владимир и Варламов Павел.
Научный руководитель: Лейнартас Евгений Константинович
доктор физико-математических наук, профессор кафедры теории функций СФУ, доцент.
Красноярская региональная детско-молодежная
Общественная организация
«научное общество учащихся»
МАОУ «общеобразовательное учреждение гимназия № 13»

Содержание

Введение

Якоб Бернулли исследовал сумму последовательности степеней натуральных, возведенных в одну и ту же степень. Он нашел формулу для вычисления такой суммы. Естественным образом возник вопрос о вычислении аналогичных сумм, например, сумм двойных последовательностей, о которых и пойдет речь в работе. Общей формулы для таких сумм нет, а ее поиски представляют трудно разрешимую задачу. Последовательность, открытая Якобом Бернулли, играет в математике очень важную роль, что объясняется ее связью с вопросами суммирования функций, простыми числами, великой теоремой Ферма, а также другими задачами.
Цель работы: обобщить формулу Бернулли суммирования последовательности степеней натуральных чисел на двойные последовательности.

Постановка задачи

Якоб Бернулли нашел следующую формулу для суммы$S_k(\mathrm{m})=\sum_{n=1}^{m} n^k$:

$$S_k(m) = B_k n + \frac{B_{k-1}}{k-1} C_k^2 n^2 + \frac{B_{k-2}}{k-2} C_n^3 n^3 + \cdots + \frac{B_1}{1} C_k^k n^k + \frac{n^{k+1}}{k+1}. \qquad (1)$$

где B_s, s=0, 1 … ,k – числа Бернулли, $C_k^s = \frac{k!}{s!(k-s)!}$ - биномиальные коэффициенты. Естественным образом возникает задача вычисления аналогичных сумм, например, сумм двойных последовательностей вида $n_1^{k_1} n_2^{k_2}$, n_1, n_2 =1, 2, … , возведенных в степени k_1 и k_2.
Двойные последовательности можно суммировать разными способами. Будем рассматривать суммирование по «треугольникам»

$$S_{k_1 k_2}(\mathrm{m}) = \sum_{n_1+n_2 \le m} n_1^{k_1} n_2^{k_2} (2)$$

В работе, мы рассмотрим частичный случай этой задачи, а именно случай, когда степень k_2=1. Тогда сумма принимает вид:

$$S_{k,1}(m) = \sum_{n_1+n_2 \le m} n_1^k n_2$$

Преобразуем ее

$$S_{k,1}(m)=\sum_{\mu=0}^{m}\sum_{n_1+n_2=\mu}{n_1}^k n_2=\sum_{\mu=0}^{m}\sum_{n_1=0}^{\mu}n_1^k(\mu-n_1)$$

и обозначим $\sigma_k(\mu)=\sum_{n_1=0}^{\mu}n_1^k(\mu-n_1)$. В развернутом виде

$$\sigma_k(\mu)=1^k(\mu-1)+2^k(\mu-2)+\cdots+(\mu-1)^k1. \quad (3)$$

Задача работы состоит в том, чтобы вычислить сумму (3).

Так как $S_{k,1}(m-1)=\sum_{\mu=0}^{m-1}\sigma_k(\mu)$, а $S_{k,1}(m)=\sum_{\mu=0}^{m}\sigma_k(\mu)$, то нужная нам сумма $S_{k,1}(m)$удовлетворяет рекуррентному соотношению, для решения которого можно применить известные методы

$$S_{k,1}(m)-S_{k,1}(m-1)=\sigma_k(m) \quad (4)$$

На первом шаге показываем, что $\sigma_k(\mu)$ удовлетворяет (разностному уравнению) рекуррентному соотношению вида

$$\sigma_k(\mu+2)-2\sigma_k(\mu+1)+\sigma_k(\mu)=\mu^k. \quad (5)$$

Отметим, что $\sigma_k(0)=\sigma_k(1)=0$.

На втором шаге находим решение рекуррентного соотношения (5),при этом пользуемся тем, что многочлены Бернулли удовлетворяют соотношению

$$\frac{1}{k+1}\left(B_{k+1}(\mu+2)-B_{k+1}(\mu)\right)=\mu^k. \quad (6)$$

Если теперь найти многочлен $\mu\sigma_k(\mu)$такой, что он удовлетворяет рекуррентному соотношению

$$\sigma_k(\mu+1)-\sigma_k(\mu)=\frac{1}{k+1}B_{k+1}(\mu), \quad (7)$$

то это и будет искомым решением соотношения (4).

Теорема. Справедлива следующая формула, которая решает задачу отыскания суммы (3):

$$\sigma_k(\mu)=\sum_{s=0}^{n}C_{n+1}^{S}\frac{B_s}{(k+1)(k+2-s)}\sum_{p=0}^{k+2-s}C_{k+2-s}^{p}B_p\mu^{k+2-s-p}, \quad (8)$$

где B_S - числа Бернулли, $C_a^b=\frac{a!}{b!(a-b)!}$–биномиальные коэффициенты. Относительно μ функция $\sigma_k(\mu)$является многочленом степени k+2.

Следствие. Формула для искомой суммы $S_{k,1}(m)$получается из формулы (8), если в ее правой части вместо $\mu^{k+2-s-p}$подставить $\frac{B_{k+3-s-p}(\mu)-B_{k+3-s-p}}{k+3-s-p}$, $B_{k+3-s-p}(\mu)$ - многочлен Бернулли, $B_{k+3-S-p}$ – числа Бернулли.

Задача состоит в том, чтобы вычислить

$$\sigma_k(\mu)=1^k(\mu-1)+2^k(\mu-2)+\cdots+1(\mu-1)^k$$

1.Числа и многочлены Бернулли

Возникли эти числа у Бернулли в связи с изучением им сумм:

$$S_k(n)=1^k+2^k+\cdots+n^k. \quad (1)$$

С помощью разложения по биному Ньютона напишем тождество:

$$(a-1)^{k+1}-a^{k+1}=-C_{k+1}^1a^k+C_{k+1}^2a^{k-1}+\cdots+(-1)^kC_{k+1}^ka+(-1)^{k+1}.$$

Полагая a=1, 2, …, n и складывая результаты слева и справа, мы получим:

$$-n^{k+1}=-C_{k+1}^1S_k(n)+C_{k+1}^2S_{k-1}(n)+\cdots+(-1)^kC_{k+1}^kS_1(n)+(-1)^{k+1}S_0(n), S_0\equiv n.$$

Отсюда вытекает рекуррентное соотношение

$$S_k(n)=\frac{1}{k+1}\left[n^{k+1}+C_{k+1}^2S_{k-1}-\cdots+(-1)^kC_{k+1}^kS_1(n)+(-1)^{k+1}S_0(n)\right] \quad (2)$$

из которого легко получить сумму$S_k(n)$, если известны $S_1(n)$, $S_2(n)$, … , $S_{k-1}(n)$, причем по индукции следует, что $S_k(n)$ является многочленом степени k+1 без свободного члена.

Легко проверить, что

$$S_1(n)=\frac{1}{2}n^2+\frac{1}{2}n; S_2(n)=\frac{1}{3}n^3+\frac{1}{2}n^2+\frac{1}{6}n; \quad S_3(n)=\frac{1}{4}n^4+\frac{1}{2}n^3+\frac{1}{4}n^2.$$

Определение. *Числами Бернулли* B_k называются коэффициенты при первой степени *n* в многочленах $S_k(n)$, k=0, 1, 2, … .
Так например, из формул для $S_1(n)$, $S_2(n)$, $S_3(n)$ следует, что
$B_0 = 1, B_1 = \frac{1}{2}, B_2 = \frac{1}{6}, B_3 = 0.$
Из определения и рекуррентного соотношения (2) вытекает простой способ вычисления чисел Бернулли. Так как $S_k(n)$ является многочленом без свободного члена, то, разделив обе части формулы (2) на n и полагая затем n=0, получим рекуррентную формулу для вычисления чисел B_k:

$$B_k = \frac{1}{k+1}\left[C_{k+1}^2 B_{k-1} - C_{k+1}^3 B_{k-2} + \cdots + (-1)^k C_{k+1}^k B_1 - (-1)^k B_0\right], \qquad B_0 = 1.$$

Бернулли удалось доказать, что и другие коэффициенты многочлена $S_k(n)$ вычисляются с помощью чисел B_k. Коэффициент при n^2 оказывается равным $\frac{B_{k-1}}{k-1} C_k^2$, коэффициент при n^3 равен $\frac{B_{k-2}}{k-2} C_k^3$, наконец, коэффициент при степени n^k оказывается не зависящим от k и всегда равным $\frac{B_1}{1} C_k^k = \frac{1}{2}$. Особняком стоит коэффициент при старшей степени k+1, который сразу находится из формулы (2). Он равен $\frac{1}{k+1}$.
Таким образом, *формула Бернулли* имеет вид

$$S_k(n) = B_k n + \frac{B_{k-1}}{k-1} C_k^2 n^2 + \frac{B_{k-2}}{k-2} C_n^3 n^3 + \cdots + \frac{B_1}{1} C_k^k n^k + \frac{n^{k+1}}{k+1}. \qquad (3)$$

Теорема. *Все числа Бернулли с нечетными номерами, кроме* B_1, *равны нулю:* $B_{2m+1} = 0$, *при* m≥1.
Для доказательства используем бином Ньютона; применим его к разности $(1+a)^{2m} - (1-a)^{2m}$:

$$(1+a)^{2m} - (1-a)^{2m} = 2(C_{2m}^1 a + C_{2m}^3 a^3 + C_{2m}^5 a^5 + \cdots + C_{2m}^{2m-1} a^{2m-1}).$$

Полагая здесь a=1, 2, …, n и складывая полученные результаты, слева получим:

$$(S_{2m}(n) + (n+1)^{2m} - 1) - (S_{2m}(n) - n^{2m}) = (n+1)^{2m} + n^{2m} - 1.$$

Справа же получим выражение

$$2(C_{2m}^1 S_1(n) + C_{2m}^3 S_3(n) + \cdots + C_{2m}^{2m-1} S_{2m-1}(n)) \qquad (4)$$

Итак, имеем

$$(n+1)^{2m} + n^{2m} - 1 = 2\left(C_{2m}^1 S_1(n) + C_{2m}^3 S_3(n) + \cdots + C_{2m}^{2m-1} S_{2m-1}(n)\right).$$

Вычислим коэффициент при n^1 в выражениях, получившихся в правой и левой частях. В выражении, стоящем в левой части, этот коэффициент, очевидно, будет равен 2m. Получить вид коэффициента при первой степени n в выражении, стоящем в правой части, немногим сложнее: для этого достаточно в формуле (4) заменить суммы $S_j(n) (j = 1, 3, \ldots 2m-1)$ числами Бернулли с теми же номерами (это утверждение следует из самого определения чисел Бернулли). Значит, имеет место такое тождество:

$$C_{2m}^1 B_1 + C_{2m}^3 B_3 + C_{2m}^5 B_5 + \cdots + C_{2m}^{2m-1} B_{2m-1} = m.$$

Но так как $C_{2m}^1 = 2m$, а $B_1 = \frac{1}{2}$, то должно быть

$$C_{2m}^3 B_3 + C_{2m}^5 B_5 + \cdots + C_{2m}^{2m-1} B_{2m-1} = 0.$$

Полагая здесь последовательно m=2, 3, 4, … и учитывая, что $C_n^k = 0$ при k>n, получим:
$B_3 = B_5 = B_7 = \cdots = 0$.
Многочленми Бернулли называются многочлены вида

$$B_n(x) = \sum_{s=0}^{n} B_s x^{n-s} (n = 0, 1, 2, \ldots),$$

где B_s - *числа Бернулли.* Так, для $n = 0,1,2,3$

$$B_0(x) = 1, B_1(x) = x - \frac{1}{2}, \quad B_2(x) = x^2 - x + \frac{1}{6}, \quad B_3(x) = x^3 - \frac{3}{2}x^2 + \frac{1}{2}x$$

Основное свойство, которое мы используем в работе состоит в том, что многочлены Бернулли удовлетворяют разностному уравнению

$$B_n(x+1) - B_n(x) = nx^{n-1}.$$

2.Рекуррентные соотношения

При решении многих комбинаторных задач мы пользовались методом сведения данной задачи к задаче, касающейся меньшего числа предметов. Метод сведения к аналогичной задаче для меньшего числа предметов называется методом рекуррентных соотношений. Пользуясь рекуррентным соотношением, можно свести задачу обn предметах к задаче об $n-1$предметах, потом к задаче об $n-2$ предметах и т.д. Последовательно уменьшая число предметов, доходим до задачи, которую уже легко решить. Во многих случаях удается получить из рекуррентного соотношения явную формулу для решения комбинаторной задачи.

Мы будем говорить, что рекуррентное соотношение имеет порядок k, если оно позволяет выразить$f(n+k)$через $f(n), f(n+1), \ldots, f(n+k-1)$. Например, $f(n+2) = f(n)f(n+1) - 3f^2(n+1) - 1$– рекуррентное соотношение второго порядка

Если задано рекуррентное соотношение k- го порядка, то ему удовлетворяет бесконечно много последовательностей. Дело в том, что первые k элементов последовательности можно задать совершенно произвольно – между ними нет никаких соотношений. Но если первые к элементов заданы, то все остальные элементы определяются совершенно однозначно – элемент f(k+1) выражается в силу рекуррентного соотношения через $f(1)$, …, $f(k)$, элемент $f(k+2)$– через $f(2)$, …, $f(k+1)$ и т.д.

Пользуясь рекуррентными соотношениями и начальными членами, можно один за другим выписывать члены последовательности, причем рано или поздно мы получим любой ее член. Однако, при этом нам придется выписать и все предыдущие члены – ведь не узнав их, мы не узнаем и последующих членов. Но во многих случаях мы хотим узнать только один определенный член последовательности, а остальные нам не нужны. В этих случаях удобнее уметь явную формулу для n-го члена последовательности. Мы будем говорить, что некая последовательность является решением данного рекуррентного соотношения, если при подстановке этой последовательности соотношение выполняется.

Простейшее рекуррентное соотношение, которое используется в задачах суммирования, имеет вид

$$f(n+1) - f(n) = \boldsymbol{\varphi}(n)(1)$$

где$\boldsymbol{\varphi}(n)$ - заданная функция, $f(n)$ - неизвестная. Нетрудно видеть, что если найдено его некоторое решение$f_r(n)$, то любое другое решение имеет вид $f(n) = f_r(n) + C$, гдеC – произвольная константа.

Отметим также следующее свойство уравнения (1). Если f_1иf_2 решения уравнения (1), с правыми частями φ_1иφ_2, то $f_1 + f_2$ – решения с правой частью φ_1+φ_2.

3.Доказательство основного результата.

Рассмотрим сумму $\sigma_n(m) = \sum_{k=0}^{m-2}(m-k-1)\,k^n, m \geq 2$. Нетрудно видеть, что $\sigma_n(0) = \sigma_n(1) = 0 = \sigma_2(n)$. Обозначим $\Delta^2\sigma_n(m)$=$\sigma_k(\mu+2) - 2\sigma_k(\mu+1) + \sigma_k(\mu)$ и рассмотрим задачу (1) и (2).

$$\begin{cases} \Delta^2\sigma_n(m) = m^n & (1) \\ \sigma_n(0) = \sigma_n(0) = 0 & (2) \end{cases}$$

Найдем решение (1) и (2). Воспользуемся тем, что $\Delta^2\sigma_n(m) = \Delta\big(\Delta\sigma_n(m)\big)$.

$$\Delta(\Delta\sigma_n(m)) = m^n,$$

Обозначим $\Delta\sigma_m(m) = f(m)$, то есть $\sigma_n(m+1) - \sigma_n(m) = f(m)$,

$$f(0) = 1, f(1) = 0.$$

Найдем решение уравнения $\Delta f(m) = m^n$. Как известно, оно равно

$$f(m) = \frac{B_{n+1}(m) - B_{n+1}}{n+1},$$

где $B_{n+1}(m) = \sum_{S=0}^{n+1} C_{n+1}^S B_S m^{n+1-S} = m^{n+1} + C_{n+1}^1 B_1 m^n + C_{n+1}^m B_n m + C_{n+1}^{n+1} B_{n+1} m^0$- многочлен Бернулли, таким образом

$$f(m) = \frac{1}{n+1} \sum_{s=0}^{n} C_{n+1}^s B_s m^{n+1-s},$$

и кроме того $f(0) = 0, f(1) = 0$ (свойствокоэффициентовB_S).
Далее воспользуемся тем, что если $\varphi_S(m)$ решение уравнения $\Delta\varphi_S(m) = m^{n+1-s}$, $\varphi_S(0) = 0$,$s = 0, 1, 2, \dots n$, то их линейная комбинация также будет решением

$$\sigma_n(m) = \sum_{s=0}^{n} C_{n+1}^s B_s \varphi_s(m).$$

Учитывая, что $\varphi_S(m) = \frac{B_{n+2-S}(m) - B_{n+2-S}}{n+2-S}$, получим
$\sigma_n(m) = \frac{1}{n+1} \sum_{S=0}^{n} C_{n+1}^S B_S \frac{B_{n+2-S}(m) - B_{n+2-S}}{n+2-S}$, где
$B_{n+2-S}(m) - B_{n+2-S} = \sum_{\mu=0}^{n+1-S} C_{n+2-S}^{\mu} B_\mu m^{n+2-1}$
Последнее выражение – многочлен степени $n + 2 - s$, при $s = 0$ - степени $n + 2$, окончательно имеем

$$\sigma_n(m) = \frac{1}{n+1} \sum_{S=0}^{n} C_{n+1}^S \frac{1}{n+2-S} \sum_{\mu=0}^{n+1-S} C_{n+2-S}^{\mu} B_\mu n^{n+2-S}.$$

Заключение

Работа посвящена задаче суммирования двойной последовательности $\square_1^{\square_1}\square_2^{\square_2}\,\square_1, \square_2 = 1,2,3$ ...степеней натуральных чисел. В случае суммирования по «треугольникам» для $\square_2 = 1$ эта задача суммирования решена.

Список литературы.

1. Гельфонд А.О., Исчисление конечных разностей, 3 изд., М., 1967;
2. Эйлер Л., Дифференциальное исчисление, пер. с лат., М.-Л., 1949;
3. Журнал «Квант»;
4. Н. Я. Виленкин, А. Н. Виленкин, П. А. Виленкин, Комбинаторика, 2006.