УДК 51

РЕШЕНИЕ УРАВНЕНИЙ, СОДЕРЖАЩИХ НЕИЗВЕСТНОЕ ПОД ЗНАКОМ МОДУЛЯ.

Соболева Мария Сергеевна
Соболева Надежда Николаевна учитель математике
МКОУ Невонская СОШ№6

Актуальность: умение решать уравнения, содержащих неизвестное под знаком модуля имеет большое практическое значение, так как такие задания встречаются на олимпиадах, математических конкурсах, играх, экзаменов, а в школьной программе на изучение дано темы отводится мало времени.

Цель: научиться решать уравнения разных видов, содержащих неизвестное под знаком модуля.

Задачи:

1. Изучить литературу по данной теме
2. Научиться решать уравнения разных видов, содержащих неизвестное под знаком модуля
3. Применять полученные знания и умения при изучении данного материала на уроках и при подготовке к экзамену.

Разработанность проблемы. Слово «модуль» произошло от латинского слова «modulus», что в переводе означает «мера». Это слово имеет множество значений и применяется не только в математике, физике и технике, но и в архитектуре, программировании и других точных науках.

Считают, что термин предложил использовать Котс, ученик Ньютона. Знак модуля был введён в XIX веке Вейерштрассом.

В архитектуре модуль – исходная единица измерения, устанавливаемая для данного архитектурного сооружения. В технике – это термин, применяемый в различных областях техники, служащий для обозначения различных коэффициентов и величин, например, модуль упругости, модуль зацепления… Модуль – одно из самых интересных и многогранных тем в математике. В школьной программе встречаются задания, содержащие модуль как задания повышенной сложности. Понятие «модуль» широко применяется во многих разделах школьного курса математики, например, в изучении абсолютной и относительной погрешностей приближённого числа; в геометрии и физике будут изучаться понятия вектора и его длины (модуля вектора).
Проблема: В июне 2012 года я участвовала в работе «Академии юных» и представляла свою работу «построение графиков линейных функций, аналитическое выражение которых содержит знак модуля». Мне было интересно предложено продолжить тему «модуля» и заниматься решением уравнении, содержащих неизвестное под знаком модуля. Понятие модуля применяется в курсах высшей математики, физики и технических наук, изучаемых в высших учебных заведениях. Умение выполнять задания, содержащие знак модуля имеет большое практическое значение, т.к. такие задания встречаются на олимпиадах, математических играх, экзаменах, хотя в школьной программе не предусматривается время на изучение данной темы.

Гипотеза: применяя различные способы можно решить уравнения, содержащих неизвестное под знаком модуля.

При выполнении работы использовались методы:

1. Изучение литературы по теме
2. Анализ и обобщение изученной информации
3. Решить уравнения, содержащих неизвестное под знаком модуля

4. Подбор уравнений

Способы решения уравнений, содержащих неизвестное под знаком модуля, зависят от вида уравнений. Рассмотрим различные виды таких уравнений и способы их решения.

1. **Уравнения вида** $|f(x)| = a$

Рассмотрены решения нескольких уравнений. Например: $|x^2 - 5x + 5| = 1$. По определению модуля данное уравнение распадается на совокупность двух уравнении:
$\left\{\begin{array}{l} x^2-5x+5=1, \\ x^2-5x+5=-1; \end{array}\right.$ $\left\{\begin{array}{l} x^2-5x+4=0, \\ x^2-5x+6=0; \end{array}\right.$ $\left\{\begin{array}{l} x_1=1;\ x_2=4, \\ x_3=2;\ x_4=3. \end{array}\right.$ Ответ: $x_1=1$; $x_2=4$; $x_3=2$; $x_4=3$.

И сделана вывод, что это уравнение имеет решение только при условии $a \ge 0$.
По определению модуля данное уравнение распадается на совокупность двух уравнений: $\left\{\begin{array}{l} f(x)=a, \\ f(x)=-a. \end{array}\right.$

2. **Уравнения вида** $f(|x|) = a$

Рассмотрены решения уравнений. Например: $x^2 - 4\cdot|x| = 21$. Рассмотрим систему: $\left\{\begin{array}{l} x^2-4x=21, \\ x \ge 0; \end{array}\right.$ $\left\{\begin{array}{l} x^2-4x-21=0, \\ x \ge 0. \end{array}\right.$ Корнями уравнения $x^2-4x-21=0$, являются числа $x_1=-3$ и $x_2=7$ из которых условию $x \ge 0$ удовлетворяет, $x_2=7$. Следовательно, корнями данного уравнения являются числа 7 и -7.

И сделан вывод, что по определению модуля данное уравнение распадается на совокупность двух смешанных систем:

1) $\left\{\begin{array}{l} f(x)=a, \\ x \ge 0; \end{array}\right.$ 2) $\left\{\begin{array}{l} f(-x)=a, \\ x < 0. \end{array}\right.$

Так как функция $f(|x|) = a$ четная, то её корни будут существовать парами противоположных чисел, т. е. если x_1 – корень данного уравнения, то и $(-x_1)$ также корень данного уравнения. Следовательно, достаточно решить одну из двух смешанных систем, добавив в ответ к полученным корням им противоположные значения.

3. **Уравнения вида** $|f(x)| = g(x)$.

Рассмотрены решения уравнений. Например: $|x^2 - 3x + 2| = 3x - x^2 - 2$. По определению модуля данное уравнение распадается на совокупность двух смешанных систем: 1) $\left\{\begin{array}{l} x^2-3x+2=3x-x^2-2, \\ 3x-x^2-2 \ge 0; \end{array}\right.$ $\left\{\begin{array}{l} 2x^2-6x+4=0, \\ 3x-x^2-2 \ge 0; \end{array}\right.$ $\left\{\begin{array}{l} x^2-3x+2=0, \\ x^2-3x+2 \le 0; \end{array}\right.$ $\left\{\begin{array}{l} x_1=1, \\ x_2=2. \end{array}\right.$

2) $\left\{\begin{array}{l} x^2-3x+2=-3x+x^2+2 \\ 3x-x^2-2 \ge 0; \end{array}\right.$, $\left\{\begin{array}{l} 0=0, \\ x^2-3x+2 =\le 0; \end{array}\right.$ $1 \le x \le 2$.

Ответ: $1 \le x \le 2$.

И получен вывод, что данное уравнение по определению модуля равносильно совокупности следующих смешанных систем:

1) $\left\{\begin{array}{l} f(x)=g(x), \\ g(x) \ge 0, \end{array}\right.$ 2) $\left\{\begin{array}{l} f(x)=-g(x) \\ g(x) \ge 0. \end{array}\right.$

4. **Уравнения вида** $|a_1x+b_1| \pm |a_2x+b_2| \pm .. \pm |a_kx+b_k| = c$

Такие уравнения решаются по следующему плану:

1) Находят значения x, при переходе через которые меняется знак выражений a_1x+b_1, a_2x+b_2, $a_3x+b_3 \ldots$ a_kx+b_k, *т.е.* $x = -\frac{b}{a}, \ldots$

2) Отмечают найденные значения $x_1, x_2, \ldots, x_k$ на числовой прямой, пусть для определенности $x_1<x_2<x_3<\ldots<x_k$.
3) Рассмотрим данное уравнение последовательно на промежутках: $(-\infty;x_1)$, $[x_1;x_2),\ldots, [x_к;\infty)$.

На каждом промежутке получается некоторое линейное уравнение, которое решают и в ответ отбирают те значения корней, которые содержатся в соответствующих промежутках.

Рассмотрены решения уравнений: $|x - 3| - |x + 2| = 5$; $|x - 1| + |x + 1| - \frac{|x-3|}{x-3} = 5$.

5. **Уравнения вида** $|f(x)| = |g(x)|$.

Рассмотрев решение уравнения: $|2x - 3| = |x + 1|$. Используя свойство модуля числа, заменим данное уравнение уравнением: $(2x - 3)^2 = (x + 1)^2$;

$$4x^2 - 12x + 9 = x^2 + 2x + 1,$$
$$3x^2 - 14x + 8 = 0,$$
$$x_{1,2} = \frac{7\pm 5}{3},$$
$$x_1=4,\ x_2 = \frac{2}{3}.$$

Ответ: $x_1=4$, $x_2 = \frac{2}{3}$.

Получили, что в соответствии с определением модуля данное уравнение равносильно совокупности двух уравнений:

1) $f(x) = g(x)$ 2) $f(x) = -g(x)$

Можно, используя свойство модуля $|a|^2 = a^2$, заменить решение данного уравнения решением уравнения $f^2(x)=g^2(x)$.

В заключении я бы хотела сказать, что мне было очень интересно работать с данной темой. Я научилась решать уравнения, содержащие неизвестное под знаком модуля.

Полученная информация по результатам исследовательской работы может быть использована на уроках и факультативных занятиях по математике, а также при подготовке к экзаменам.

Применение знаний на практике по решению уравнений, содержащих неизвестное под знаком модуля, даёт хорошую возможность сочетать «алгоритмический» подход с творческим поиском и анализом, что развивает все виды мышления.

Литература:

1. Сборник задач по математике для поступающих в вузы. Под ред. Сканави М.И. 6-е изд. М.: Оникс, 2007.

2. Сборник задач по алгебре. 8-9 класс. М.Л.Галицкий, А.М.Гольдман, Л.И.Звавич, М.: Просвещение, 1992г.

3. Задач по математике. Алгебра. В.В.Вавилов, И.И.Мельников, С.Н.Олехин, П.И.Пасиченко – М.: Наука – главная редакция физико – математической литературы. 1987г.

4. Система тренировочных задач и упражнений по математике. А.Я.Симонов, Д.С.Бакаев, А.Г.Эпельман, А.А.Бесчинская, Р.М.Мостовой, А.Л.Абрамов – М.: Просвещение, 1991г.

5. gukit.ru|sites|default|files|og…